This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

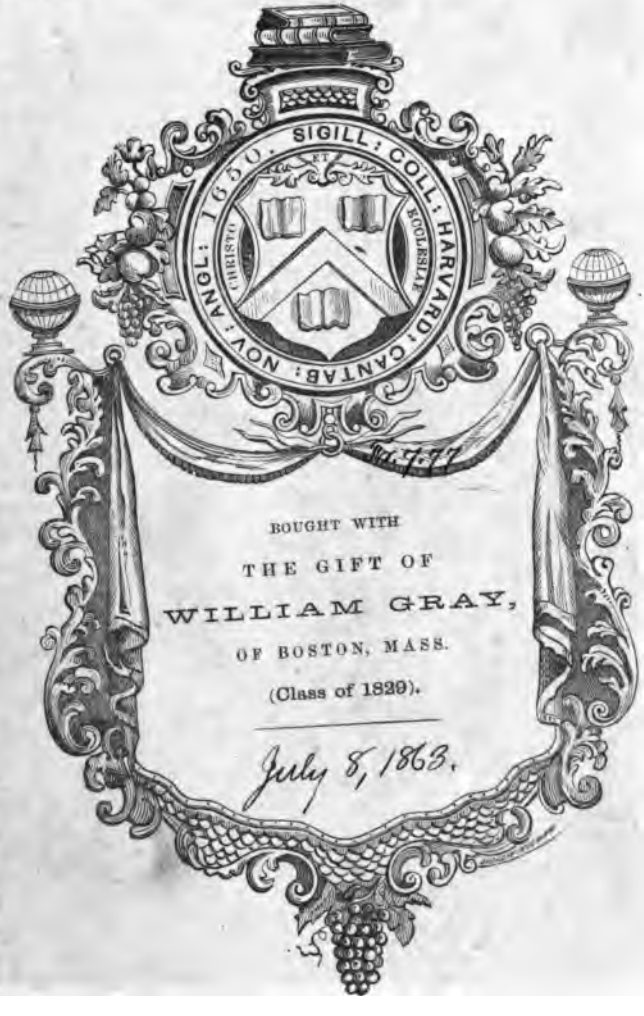
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

22.76

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 5708.52.2



BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).

July 8, 1863.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

TEXTE

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET
RUE DE VAUGIRARD, 9

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR H. TRESCA

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

RÉDIGÉ

conformément au dernier Programme d'admission à cette École

D'APRÈS LES OUVRAGES ET LES LEÇONS

DE TH. OLIVIER

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS ET A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

TEXTE

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14

(Près de l'École de Médecine)

1852

Math 5708.52.2

1863, July 8.
Fr. T. T.
Gray Fund.

PREFACE.

En publiant ce nouveau traité de géométrie descriptive, nous n'avons eu pour but que de faciliter aux élèves l'étude des méthodes dont le nouveau programme d'admission à l'École polytechnique exige d'eux la connaissance.

La géométrie descriptive, qui emprunte à la géométrie ordinaire toute la rigueur de ses démonstrations, doit en être considérée comme l'une des applications les plus importantes; mais avant qu'elle soit entre les mains de l'ingénieur un outil toujours prêt à fonctionner, il faut qu'il ait pris l'habitude de se représenter les formes dans l'espace, et rien ne saurait être plus propre à lui en faciliter les moyens, que la pratique des méthodes maintenant connues sous les noms de méthode des changements de plan, et de méthode des mouvements de rotation.

La connaissance de ces moyens généraux, présentée jusqu'ici d'une manière trop élevée pour la plupart des lecteurs, avait besoin d'être pour ainsi dire vulgarisée dans un traité élémentaire; ils offrent d'autant plus d'intérêt, que la mémoire ne conserve le plus souvent

le souvenir des détails, qu'à la condition qu'ils se présentent comme se rattachant à un principe commun.

Autant que possible, nous avons suivi dans la rédaction l'ordre du programme, et nous croyons avoir donné, avec les développements nécessaires, la solution de tous les problèmes qui y sont désignés.

Les planches, réunies en un volume séparé du texte, présentent toujours, en regard les unes des autres, les différentes solutions de chaque énoncé; et encore bien que pour satisfaire à cette condition, nous ayons dû les disposer dans un autre ordre que le texte, nous pensons qu'elles pourront ainsi faire l'objet d'une plus facile comparaison, et que l'examen attentif que les élèves en feront, sera pour eux un utile exercice; une double table de reférence permet d'ailleurs de retrouver immédiatement le texte ou l'épure que l'on peut avoir à consulter.

Je dois à la bienveillance de M. Théodore Olivier d'avoir pu entreprendre ce travail que je suis heureux de publier sous son patronage; ce sont ses notations que j'ai prises, ce sont ses leçons que j'ai imparfaitement reproduites. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici toute ma reconnaissance.

PROGRAMME

DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

EXIGÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Problèmes relatifs au point, à la droite et au plan[1].

Par un point donné dans l'espace, mener une droite parallèle à une droite donnée, et trouver la grandeur d'une partie de cette droite.

Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.

Construire le plan qui passe par trois points donnés dans l'espace.

Deux plans étant donnés, trouver les projections de leur intersection.

Une droite et un plan étant donnés, trouver les projections du point où la droite rencontre le plan.

Par un point donné, mener une perpendiculaire à un plan donné, et construire les projections du point de rencontre de la droite et du plan.

Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée, et construire les projections du point de rencontre des deux droites[2].

Un plan étant donné, trouver les angles qu'il forme avec les plans de projection.

Deux plans étant donnés, construire l'angle qu'ils forment entre eux.

Deux droites qui se coupent étant données, construire l'angle qu'elles forment entre elles.

Construire l'angle formé par une droite et par un plan donnés de position dans l'espace.

---

1. On fera usage, pour la résolution de ces problèmes, de la méthode du changement des plans de projection.

2. On ne demandera pas l'épure de la plus courte distance des deux droites.

Problèmes relatifs aux plans tangents.

Mener un plan tangent à une surface cylindrique ou à une surface conique : 1° par un point pris sur la surface ; 2° par un point pris hors de la surface; 3° parallèlement à une droite donnée.

Par un point pris sur une surface de révolution, dont on connaît le méridien, mener un plan tangent à cette surface.

Problèmes relatifs aux intersections de surfaces.

Construire la section faite, sur la surface d'un cylindre droit et vertical, par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection. — Mener la tangente à la courbe d'intersection. — Faire le développement de la surface cylindrique, et y rapporter la courbe d'intersection, ainsi que la tangente.

Conduire l'intersection d'un cône droit par un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection. Développement et tangente.

Construire la section droite d'un cylindre oblique. (Pour simplifier les constructions, on emploiera la méthode du changement des plans de projection.) — Mener la tangente à la courbe d'intersection. Faire le développement de la surface cylindrique, et y rapporter la courbe qui servait de base, ainsi que ses tangentes.

Construire l'intersection d'une surface de révolution par un plan, et les tangentes à la courbe d'intersection. — Résoudre cette question, lorsque la ligne génératrice est une droite qui ne rencontre pas l'axe.

Construire l'intersection de deux surfaces cylindriques et les tangentes à cette courbe.

Construire l'intersection de deux cônes obliques et les tangentes à cette courbe.

Construire l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

Nota. Les candidats devront présenter aux examinateurs les épures relatives à toutes ces questions, revêtues de la signature de leur professeur.

Le dessin de croquis étant indispensable aux ingénieurs et l'une des bases du travail graphique à l'École polytechnique, cinq de ces épures seront en outre faites à main levée; deux au moins de ces croquis auront rapport, l'un aux plans tangents et l'autre aux intersections de surfaces.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS, LECTURE, NOTATIONS.

1. La géométrie descriptive est une science qui apprend à lire dans l'espace, et à projeter sur deux plans une forme quelconque, en permettant d'étudier sur deux projections tous les accidents de forme et toutes les propriétés géométriques que l'on pourrait observer sur l'objet lui-même, doué des trois dimensions.

On conçoit dès lors quelle est l'importance de cette science. L'ingénieur, l'architecte, le mécanicien, n'éprouvent aucune difficulté, lorsqu'elle leur est devenue familière, pour discuter dans leur cabinet tous les détails des projets qu'ils élaborent; et leurs dessins définitifs suffisent à l'exécution complète de leurs idées, tout aussi bien et souvent mieux que ne pourraient le faire des modèles en relief.

Ce haut degré d'utilité de la géométrie descriptive qui en rend l'étude si nécessaire, n'est pas le seul caractère qui lui soit propre. Ses méthodes pratiques ne sauraient plus être ignorées d'aucun artisan; mais elle est aussi pour le géomètre une science de recherche, dans toute l'acception du mot, et si les moyens dont elle dispose offrent le plus souvent moins de généralité que les ressources de l'analyse, elle jouit de cet immense avantage de frapper plus vivement l'imagination, et d'arriver souvent au même résultat par des méthodes plus élégantes et plus simples.

2. Ce double caractère de la géométrie descriptive sera notre guide dans ces éléments; et quoique notre but principal soit de familiariser les élèves avec les procédés graphiques, nous choisirons plus particulièrement parmi ces procédés ceux qui nous paraîtront les plus propres à les initier à la philosophie de cette science encore nouvelle, que l'illustre Monge a pour ainsi dire créée. En rassemblant les procédés épars mis en œuvre avant lui par les constructeurs, Monge est en effet le premier qui, de ces procédés d'exécution, ait fait sortir une science de recherche dont l'importance à ce point de vue n'est peut-être point encore assez généralement appréciée.

I. REPRÉSENTATION DU POINT.

3. Tout corps est un assemblage de points; cherchons donc les moyens à l'aide desquels nous pourrons représenter le plus facilement la position d'un point dans l'espace.

Que nous nous placions par la pensée devant un mur vertical élevé sur un sol parfaitement horizontal, et le rencontrant suivant une ligne droite LT, ce mur formera un plan; et tout point placé au-devant de ce plan sera très-facilement défini à l'aide de ces seules données. Soit, en effet, m (fig. 1), le point dont il s'agit; si nous connaissions la hauteur h à laquelle il est situé au-dessus du sol, nous saurions déjà qu'il est nécessairement contenu dans un plan horizontal distant du sol de cette hauteur h, et par cette première condition nous pouvons remarquer que la position du point m se trouve de beaucoup circonscrite; le plan dont nous venons de parler est le *lieu* de tous les points situés à la distance h au-dessus du sol.

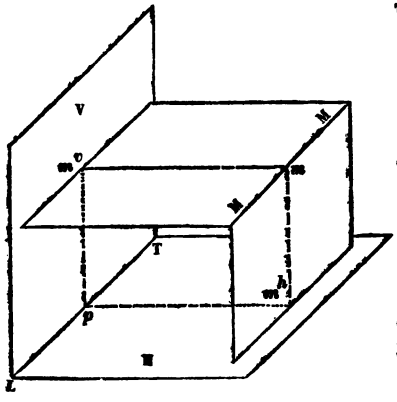


Fig. 1.

Si maintenant nous connaissions la distance l de ce point au plan vertical formé par le mur, il n'est pas moins évident qu'il

devra se trouver aussi dans un nouveau plan vertical distant du mur de cette longueur l; et cette nouvelle condition particularise encore davantage la position de notre point m, car devant être à la fois dans les deux plans fictifs dont nous venons de parler, il ne saurait se trouver ailleurs qu'à leur commune intersection, que nous savons être une ligne droite M parallèle à LT, les intersections respectives de deux plans respectivement parallèles étant nécessairement parallèles entre elles.

Pour que la position du point m fût complétement déterminée, il nous suffirait donc de savoir en quel endroit de la droite M il se trouve, et nous verrons que le dessin lui-même nous donnera toujours une indication qui sera équivalente à cette condition, en telle sorte que nous n'avons à nous occuper pour l'instant que des deux premières qui peuvent aussi se présenter d'une manière plus simple; si, en effet, nous abaissons du point m une perpendiculaire mm^h sur le plan horizontal H formé par le sol, cette distance mm^h est par définition la distance du point m au plan H. Le pied m^h de cette perpendiculaire est dit la *projection* du point m sur le plan H; mm^h est appelée la *ligne projetante* de ce point m sur ce même plan. Nous aurons souvent à rappeler ces expressions.

Ce que nous avons dit pour le plan H formé par le sol, s'applique identiquement au plan V formé par le mur : m^v est la projection du point m sur le plan V, et mm^v la ligne projetante.

4. Imaginons que par les deux droites mm^h, mm^v ainsi définies, nous fassions passer un plan que nous appellerons X pour pouvoir le distinguer dans le discours, je dis que ce plan est perpendiculaire aux deux plans primitifs H et V, et par conséquent à leur commune intersection LT, que l'on appelle la *ligne de terre*. Ce plan X est perpendiculaire au plan H, puisqu'il contient la perpendiculaire mm^h abaissée du point m sur ce plan; pour la même raison ce plan X est aussi perpendiculaire au plan V.

De ce que le plan X, qui contient à la fois les deux droites qui projettent respectivement le point m sur les plans H et V, que l'on appelle *plans de projection*, est perpendiculaire à la ligne LT, il s'ensuit que cette ligne est perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans le plan X, et que par consé-

quent elle est à la fois perpendiculaire aux droites $m^h p$, $m^v p$ qui forment les intersections respectives du plan X avec les deux plans de projection. Cette propriété remarquable sera invoquée lorsque nous aurons prochainement à parler du rabattement des plans de projection.

5. Si nous considérons le quadrilatère plan $mm^h pm^v$ contenu dans le plan X, nous sommes aussi conduits à une remarque fort importante et qui constitue, pour ainsi dire, la base des procédés de la géométrie descriptive. On peut démontrer de bien des manières différentes que ce quadrilatère est un rectangle ; s'il est nécessaire, nous en choisirons une entre toutes. l'angle en p est droit, car le plan X étant perpendiculaire à la commune intersection LT des plans de projections H et V, cet angle mesure l'angle de ces deux plans que nous avons supposés être perpendiculaires l'un à l'autre; l'angle en m^h est droit, car, par construction, mm^h est perpendiculaire au plan H, et par conséquent à toute droite pm^h qui passe par son pied dans ce plan; pour la même raison l'angle en m^v est droit, et comme la somme des quatre angles d'un quadrilatère plan est égale à quatre angles droits, le quatrième angle en m est nécessairement droit aussi, et la figure, ainsi que nous l'avons annoncé, est un rectangle.

Dans un rectangle les côtés opposés sont égaux et parallèles; donc $mm^h = pm^v$, $mm^v = pm^h$. Nous savons d'ailleurs que pm^v, par exemple, est perpendiculaire sur LT; donc, si de la projection m^v d'un point m sur l'un des plans de projection V, on abaisse une perpendiculaire sur la ligne de terre, cette perpendiculaire est égale à la distance du point m de l'espace à l'autre plan de projection H. Le même raisonnement s'applique, si dans cet énoncé on change V en H et H en V, ce que l'on pouvait, à priori, prévoir, ne fût-ce que par raison de symétrie. C'est cette conséquence que l'on peut énoncer de la manière la plus générale, en disant que *la distance entre l'une des deux projections d'un point et la ligne de terre, est égale à la distance du point lui-même à l'autre plan de projection.*

Toutes les propriétés géométriques que nous venons de reconnaître au sujet des deux projections d'un point sur les deux plans matériels que nous avons considérés sont tout aussi vraies

pour une réduction quelconque de notre figure, et nous pourrons, à une échelle quelconque, amplifiée ou réduite, représenter en relief la position du point m par rapport à deux nouveaux plans H et V, perpendiculaires entre eux.

6. Nous pourrions ensuite séparer le plan H du plan V, l'un portant la projection m^h du point m, l'autre sa projection m^v, et lorsque nous voudrions retrouver la véritable position du point m, il nous suffirait de replacer horizontalement la feuille de papier, par exemple, sur laquelle m^h est tracée, de placer verticalement la feuille de papier sur laquelle est marquée m^v, d'élever par les points m^v et m^h des perpendiculaires respectives aux plans de projection, et pourvu qu'à l'aide d'un repérage convenable, ces deux plans de projection aient été placés de nouveau, l'un par rapport à l'autre, dans la même position que primitivement, ces deux perpendiculaires se rencontreront nécessairement en un certain point qui ne sera autre que le point m.

Ce repérage, c'est précisément ce qui détermine la position du point p sur la droite LT, ou, ce qui revient au même, la position du point m sur la droite M que nous avons considérée en premier lieu.

Mais il est un moyen simple d'éviter ce raccordement des deux plans H et V, c'est de ne point les séparer, tout en évitant de leur conserver, l'un par rapport à l'autre, la position rectangulaire que nous venons de définir et qui serait fort incommode dans les opérations graphiques.

7. Soit LT (Pl. I, fig. 1) la ligne de terre tracée sur la feuille de papier, que nous considérons dans notre représentation comme étant le plan horizontal H, le plan V serait un plan vertical élevé suivant cette ligne, comme le mur dont nous nous étions occupés dans notre première comparaison. La projection horizontale d'un point m pourra être en m^h, et ce point m serait parfaitement déterminé pour nous si nous pouvions tout à la fois rapporter à la place convenable et le plan vertical et la projection verticale du point m. Mais si nous supposons que ce plan, au lieu d'avoir été séparé du plan horizontal H, y soit resté fixé par l'intersection commune LT, que nous considérerons comme une charnière, et se soit rabattu d'avant en arrière sur la

même feuille de papier, il est facile de concevoir que sur cette même feuille on puisse tracer les deux projections du point m. m^h sera la projection horizontale réelle de ce point dans sa véritable position; et pour avoir la position vraie de m^v, il faudra faire l'opération inverse de celle que nous venons de décrire, c'est-à-dire faire tourner d'un angle droit la position de la portion de papier sur laquelle était représenté le plan vertical.

Dans toute épure, chaque fois que l'on trouvera tracée une ligne de terre LT, accompagnée des projections horizontales et verticales de certains points, il faudra donc par la pensée se rendre compte du résultat de ce mouvement de relèvement autour de la ligne LT considérée comme charnière, si l'on veut s'habituer à lire convenablement la situation de ces points dans l'espace, à l'examen seul de leurs projections.

8. Pour nous habituer davantage à ces considérations, nous énumérerons avec quelques détails les diverses positions qu'un point peut occuper dans l'espace, et les positions correspondantes de ses projections. Cet examen a été parfaitement caractérisé par cette expression : *alphabet du point*.

Un plan est une surface indéfinie qui s'étend en tous sens, et qui n'est assujettie qu'à cette seule condition : qu'une droite indéfinie, qui a deux points communs avec ce plan, y est tout entière contenue. C'est sous ce point de vue général qu'il faut envisager les plans de projection, en telle sorte qu'on doit les considérer comme partageant tout l'espace en quatre portions formées de quatre angles dièdres droits, hors desquels aucun point ne saurait se trouver, en même temps qu'ils se partagent réciproquement en deux parties suivant leur ligne LT d'intersection. Ainsi le plan horizontal H sépare l'espace en deux parties, l'une supérieure, l'autre inférieure; et le plan vertical V, quelle que soit sa situation, divise par rapport à l'observateur, l'espace en deux parties, l'une située en avant de ce plan et l'autre située par derrière. Il importe que les espaces compris dans chacun de ces quatre angles dièdres puissent être parfaitement désignés dans le langage, et le simple examen auquel nous venons de nous livrer nous offre de lui-même cette désignation avec toute la netteté désirable. L'espace compris entre

la partie antérieure du plan horizontal et la partie supérieure du plan vertical sera pour nous l'angle *antérieur-supérieur* : les trois autres espaces seront : l'angle *antérieur-inférieur*, l'angle *supérieur-postérieur*, et enfin l'angle *inférieur-postérieur* ; nous supposerons successivement que notre point *m* est situé dans l'intérieur de chacun de ces espaces.

1° Le point est situé dans l'angle dièdre *antérieur-supérieur* : c'est le cas que nous avons examiné dans les considérations qui précèdent. Il résulte de cette situation particulière du point *m* que sa projection horizontale se trouve en avant de la ligne de terre, et quant à sa projection verticale, dont la véritable position est au-dessus du plan horizontal de projection, elle vient nécessairement se placer derrière la ligne de terre, comme on le voit dans la fig. 1 (Pl. I), lorsque la partie supérieure du plan vertical est rabattue, comme on le suppose toujours dans les épures, sur la partie postérieure du plan horizontal.

9. C'est ici le lieu de remarquer que, si d'une part la ligne $m^h p$, qui reste immuable dans ce déplacement, est perpendiculaire à la ligne de terre LT, il en est de même de la ligne $m^v p$, car cette ligne n'est autre chose que le rabattement d'une ligne que nous savons être perpendiculaire à la charnière LT ; dans ce mouvement, les relations de position de tous les points contenus dans le plan vertical V n'ont pas été modifiées ; or LT peut être considérée comme appartenant à ce plan V, et par conséquent l'angle Lpm^v n'a pu se modifier dans le rabattement ; il est resté un angle droit. Donc enfin, lorsque ce rabattement est effectué, les deux droites $m^h p$ et $m^v p$ sont dans le prolongement l'une de l'autre ; elles ne forment qu'une seule et même droite perpendiculaire à la ligne de terre.

Ce raisonnement est identiquement applicable à toute autre position du point *m*, et cette conséquence s'exprime d'une manière générale en disant que *les deux projections d'un point sont nécessairement placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre*. Cet énoncé ne doit jamais sortir de la mémoire, nous en ferons un usage continuel.

2° Le point *n* est placé dans l'angle dièdre *supérieur-postérieur*. Pour peu que l'on réfléchisse à cette position particulière du point que l'on examine, on voit immédiatement qu'en abais-

sant de ce point n une perpendiculaire sur le plan horizontal, le pied de cette perpendiculaire, qui est par définition la projection horizontale du point, tombe nécessairement derrière la ligne de terre : cette projection horizontale sera donc située comme en n^h. Quant à la projection verticale avant le rabattement, elle s'obtient en abaissant une perpendiculaire du point n de l'espace, sur le plan vertical V, et l'on voit que le pied n^v de cette perpendiculaire sera, comme dans le cas précédent, situé comme le point lui-même au-dessus du plan horizontal indéfini de projection, et comme c'est la partie supérieure du plan vertical qui, par suite de la convention adoptée, vient se rabattre, lorsqu'on veut obtenir la figure plane que l'on appelle *épure*, sur la partie postérieure du plan horizontal, cette projection verticale se trouvera aussi derrière la ligne de terre LT, et l'on pourrait craindre qu'il n'y eût confusion entre les deux projections du même point si les indices ^{h} et ^{v} que nous employons, n'avaient pour effet de les distinguer l'une de l'autre. Les deux projections n^h et n^v doivent encore se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, et les longueurs n^hq et n^vq comptées sur cette perpendiculaire sont encore respectivement les mesures des distances du point n au plan vertical et au plan horizontal de projection.

Il convient cependant d'ajouter à cette remarque que la distance n^hq est maintenant comptée dans un autre sens que pour le point m, et cette différence indique qu'au lieu d'être en avant du plan V de projection, le point n que nous venons de considérer est situé par derrière.

3° Le point r est dans l'angle *antérieur-inférieur*. La projection horizontale r^h est en avant de la ligne de terre. La projection verticale qui, avant son rabattement, était située au-dessous du plan horizontal, participe, lors de ce rabattement, au déplacement général du plan V, dont la partie supérieure vient s'appliquer sur la partie postérieure du plan horizontal; mais ce mouvement ne peut s'effectuer autour de la ligne LT considérée comme charnière, sans que la partie inférieure du plan vertical, qui n'est point modifié dans sa forme, y participe également, et sans qu'elle vienne se confondre avec la partie antérieure du plan horizontal. Les deux projections du point r seront donc placées, comme r^h et r^v, sur une même perpendiculaire à la

ligne de terre, les seuls indices suffisant pour distinguer entre elles les deux projections. Nous remarquons encore que les longueurs qui mesurent sur cette perpendiculaire les distances respectives du point r aux deux plans de projection, sont placées dans une position inverse de celles qui correspondent au point n, parce qu'en effet la situation du point r est l'inverse de celle du point n par rapport à chacun des plans de projection.

4° Le point s appartient à l'angle *postérieur-inférieur*. La situation est inverse de celle du point m par rapport à chacun des plans de projection, m^h étant en avant de la ligne de terre, s^h sera derrière; m^v étant en arrière, s^v sera nécessairement en avant, ainsi du reste que l'établiraient facilement des considérations analogues aux précédentes.

10. En outre de ces quatre positions générales qu'un point peut occuper dans l'espace, il en est d'autres plus particulières qui correspondent aux cas où le point donné est contenu dans l'un des plans de projection.

S'il se trouve dans le plan horizontal, il est lui-même sa projection horizontale comme en t^h; sa projection verticale est sur la ligne de terre en t^v, puisque la ligne projetante est alors tout entière contenue dans le plan horizontal, et, par conséquent, aussi son pied, qui n'est autre chose que la projection verticale. Le point u est un autre exemple, dans lequel le point donné est situé, dans le plan vertical, au-dessus du plan horizontal.

Si le point était sur la ligne de terre, il serait à la fois sa projection horizontale et sa projection verticale.

11. Remarque. Lorsque cette circonstance se présente, comme pour les points n et r, que les deux projections du point donné sont situées du même côté de la ligne de terre, il peut arriver que ces deux projections se superposent dans le dessin : le point est alors également éloigné du plan horizontal et du plan vertical, puisque n^hq, par exemple, devient égal à n^vq, et par conséquent il est situé au milieu de l'angle que forment les deux plans de projection; ce serait ici l'angle *postérieur-supérieur*.

II. REPRÉSENTATION DE LA DROITE.

12. Une ligne n'étant autre chose qu'une suite de points, ou, en d'autres termes, étant la *trajectoire* d'un point qui se meut, toute ligne de l'espace sera parfaitement déterminée lorsqu'on connaîtra la projection de chacun de ses points; mais lorsqu'il s'agit d'une ligne droite, il n'est pas nécessaire de connaître toutes ces projections; en général deux suffisent, car si par la droite donnée dans l'espace, que nous désignerons par A, nous menons un plan perpendiculaire au plan horizontal, par exemple, ce qui est toujours possible, toutes les perpendiculaires que l'on pourrait abaisser des divers points de la droite sur le plan horizontal, ou, en d'autres termes, les lignes projetantes de ces différents points sur le plan horizontal, seront nécessairement contenues dans ce plan, qui sera, en effet, le lieu de toutes ces lignes projetantes, et que l'on pourra appeler le *plan projetant* de la droite. Puisqu'il contient toutes les lignes projetantes, il contient les pieds de toutes ces lignes sur le plan horizontal : ces pieds ne sont autre chose que la projection même de la droite A, et cette projection, étant dès lors la commune intersection du plan projetant et du plan horizontal, ne saurait être qu'une ligne droite, car on sait que deux plans ne peuvent avoir qu'une droite pour intersection commune.

Le même raisonnement est applicable au plan vertical, et l'on peut dès lors énoncer, d'une manière générale, que, quelle que soit la position d'une droite, ses projections sont également des lignes droites.

13. Il suit de là que les projections d'une droite sont immédiatement déterminées lorsque l'on connaît les projections de deux de ses points : il suffit pour cela de joindre par une ligne droite les deux projections horizontales de ces points, ce qui donne la projection horizontale de la droite; la projection verticale s'obtient en joignant également les projections verticales des deux points. Telle est la droite A (fig. 2) dont les deux projections A^h et A^v, ont été obtenues au moyen des projections, m^h et n^h, m^v et n^v, des deux points m et n qui appartiennent à

cette droite. Telle est aussi (fig. 3) la droite B, dont les projections B^h et B^v sont dans une position différente. La règle que nous venons d'énoncer est générale, et peut être appliquée, quelle que soit la position des deux points connus, dans l'un quelconque des quatre angles dièdres formés par les deux plans de projection, car notre raisonnement n'a exigé aucune hypothèse particulière sur cette position.

14. Nous signalerons quelques-unes des positions particulières qu'une droite peut occuper, et les élèves s'exerceront utilement à se bien rendre compte de la position des projections dans chacun de ces cas. Lorsqu'une droite (fig. 4) est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan est une parallèle à la droite elle-même, et sa projection sur l'autre plan de projection est parallèle à la ligne de terre. La ligne A, dont les projections sont A^h et A^v, est parallèle au plan V.

Lorsqu'une droite (fig. 5) est parallèle à la ligne de terre, ses deux projections sont également parallèles à cette ligne, et réciproquement.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection comme A (fig. 6), sa projection sur ce plan se réduit à un seul point, toutes les lignes projetantes se confondent en une seule, et l'autre projection est une perpendiculaire à la ligne de terre.

Lorsqu'une droite, sans être perpendiculaire à aucun des plans de projection, est cependant perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux projections sont également perpendiculaires à cette ligne et ne forment sur l'épure qu'une seule et même ligne droite. Telle est la ligne B (fig. 6).

Lorsqu'une droite est dans le plan bissecteur de l'angle dièdre *supérieur-antérieur*, ses deux projections sont également inclinées sur la ligne de terre, parce qu'en effet les deux projections de chaque point considérées séparément sont également éloignées de la ligne de terre.

Lorsque la droite est contenue dans le plan bissecteur de l'angle dièdre *supérieur-postérieur*, pour chacun de ses points, les deux projections se confondent, et, par conséquent, aussi les deux projections de la droite. Cette position et la précédente sont représentées en projections (fig. 7).

Lorsqu'une droite est contenue dans l'un des plans de projection, elle est elle-même sa projection sur ce plan, et son autre projection se confond avec la ligne de terre. (Voy. D, fig. 8.)

15. Généralement une droite est parfaitement déterminée par la connaissance de ses deux projections, car il suffit, pour la trouver dans l'espace, d'élever par sa projection horizontale un plan perpendiculaire au plan horizontal, d'élever par sa projection verticale ramenée à sa véritable position, un plan perpendiculaire au plan vertical : l'intersection de ces deux plans est la droite donnée dans l'espace.

Il ne saurait y avoir d'exception à cette règle que si les deux plans projetants dont nous venons d'indiquer la construction ne se rencontraient pas ou étaient complétement confondus. Dans le premier cas, ils n'auraient point d'intersection; dans le second cas, on ne saurait où la trouver. Or, le premier cas ne peut jamais se réaliser; pour que les plans ne se rencontrassent pas, quelque prolongés qu'on les supposât, il faudrait qu'ils fussent parallèles, ce qui ne saurait s'accorder avec cette condition qu'ils doivent être respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection, lesquels, loin d'être parallèles, sont par définition perpendiculaires entre eux.

Le second cas, au contraire, celui de l'identité des deux plans projetants, se présente lorsque les deux plans projetants sont à la fois perpendiculaires à la ligne de terre comme pour la ligne B de la figure 6; il faut alors connaître les deux projections de deux points de la droite, pour que sa situation dans l'espace soit parfaitement connue. En ne donnant les projections que d'un seul point, l'incertitude subsisterait encore pour la droite B, qui, tout en étant perpendiculaire à la ligne de terre, peut être diversement inclinée sur chacun des plans de projection. Pour la droite A, au contraire, qui, dans l'exemple de la figure 6, est perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale, se réduisant au point unique A^h, la droite elle-même s'obtient fort simplement dans sa véritable position en élevant, par ce point, une perpendiculaire indéfinie au plan horizontal.

16. Parmi les points d'une droite il en est deux, en général,

qui méritent une attention particulière; ce sont ceux en lesquels la droite rencontre les plans de projection, et que l'on appelle ses *traces* : la trace horizontale d'une droite A est le point en lequel cette droite rencontre le plan horizontal, et cette définition s'applique également en ce qui concerne le plan vertical.

Nous avons vu qu'une droite est toujours parfaitement déterminée de position lorsqu'on connaît par leurs projections deux quelconques de ses points; les traces peuvent être, quand on les connaît, utilisées comme tous autres points pour cet objet, mais elles offrent cela de remarquable qu'elles donnent immédiatement les points en lesquels les deux projections de la droite rencontrent la ligne de terre, puisque chacune des traces, étant dans l'un des plans de projection, a nécessairement une de ses projections sur cette ligne de terre. Ainsi, si l'on considère la ligne A de la fig. 2 (Pl. I), et si ses traces sont données à priori on connaîtra a^h et a^v, b^h et b^v; a^h et b^v (ce dernier avant le rabattement) étant réellement les points en lesquels la droite A rencontre les plans de projection : a^v et b^h seront nécessairement sur la ligne de terre puisqu'ils sont respectivement les projections de deux points situés sur les plans de projections. Ainsi, la projection A^h de la droite A rencontre la ligne de terre en un point b^h qui est la projection horizontale de la trace verticale de cette droite, et inversement la projection verticale A^v, rencontre la ligne de terre en un point a^v, qui est la projection verticale de la trace horizontale a^h de la droite A.

III. PROBLÈMES RELATIFS A LA DROITE.

17. Il arrive rarement qu'une droite soit donnée par ses traces; si nous avons présenté cet exemple, c'est uniquement pour faire comprendre comment, étant données les projections d'une droite, on arrive à trouver ses traces, et cette recherche, nous aurons à la faire à chaque pas.

La solution de ce problème élémentaire se trouve déjà écrite dans notre fig. 2, car si b^h, qui est la projection horizontale d'un certain point b de l'espace est sur la ligne de terre, c'est que ce point b se trouve dans le plan vertical de projection, et sa projection verticale b^v est sur la perpendiculaire $b^h b^v$ élevée par

b^h sur la ligne de terre : le point b de l'espace dont les projections sont b^h et b^v, est donc à la fois sur la droite A et dans le plan vertical; donc il est la trace verticale de cette droite, et, comme d'ailleurs, il est lui-même sa projection verticale, le point b^v n'est autre chose que cette trace b elle-même.

De même a^h est la trace horizontale de la droite A, de sorte que la règle générale à l'aide de laquelle on peut déterminer les traces d'une droite s'énonce ainsi : prolonger les projections de cette droite jusqu'à la ligne de terre, élever, par les points de rencontre, des perpendiculaires sur cette ligne; les points où les perpendiculaires viennent rencontrer les projections de la droite sont les traces de même nom que les projections auxquelles ces derniers points appartiennent.

La figure 3 offre une application de cette règle dans des circonstances un peu différentes; la même série de raisonnements conduirait au même résultat.

La connaissance des traces d'une droite est précieuse en ce que l'esprit saisit facilement la position qu'occupe dans l'espace la droite qui les réunit; il n'a pour ainsi dire aucun effort à faire, la trace horizontale est sur le plan de l'épure un des points de la droite elle-même; et pour se rendre compte de la position qu'elle occupe réellement, il suffit de se représenter le point en lequel viendrait se placer la trace verticale après le relèvement du plan vertical de projection qui la contient.

18. Nous appliquerons encore ce que nous avons dit de la projection des droites à un problème fort simple qui en découle immédiatement. Si a^h et a^v (Pl. II, fig. 1) sont les deux projections d'un point a de l'espace, et pour cela nous savons qu'ils doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre LT; toute droite qui passera par ce point aura pour projection des droites qui passeront par les projections de ce point, car la projection de la droite n'est par définition que le *lieu* des projections de ses différents points : si A^h et A^v ne passaient pas respectivement par a^h et a^v, la droite A ne passerait évidemment pas par le point a.

De cette remarque on conclut que pour que deux droites se coupent, il faut que leurs projections horizontales et leurs projections verticales se rencontrent respectivement en deux points

qui soient situés sur une même perpendiculaire à ligne de terre. A^h et A^v (fig. 2) étant les deux projections d'une certaine droite A, nous venons de voir en effet que si cette droite passe par le point a, A^h passera par a^h, projection horizontale de a, et A^v par la projection verticale a^v de ce même point; si une deuxième droite B passe également par le point a, ses deux projections B^h et B^v passeront également par les deux projections du point a; et comme les deux projections a^h et a^v d'un point sont toujours placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, l'énoncé de notre principe se trouve ainsi vérifié. Ainsi (fig. 3), les deux droites C et D représentées respectivement par leurs projections, ne se rencontrent pas dans l'espace, le point c^v, en lequel leurs projections verticales, par exemple, se croisent, peut bien être considéré à la fois comme la projection verticale d'un certain point de la droite C, et la projection verticale d'un certain point de la droite D, mais ces deux points de l'espace ne sauraient se confondre. Pour obtenir la projection horizontale du point c qui se projette verticalement en c^v, et qui appartient à la droite C, il faut abaisser de c^v une perpendiculaire $c^v p$ sur la ligne de terre, prolonger cette perpendiculaire jusqu'à ce que l'on rencontre en c^h la projection C^h de la droite; on obtiendrait de la même manière la projection d^h du point de la droite D qui correspond à c^v, ce qui démontre d'une autre manière encore que si c^h et d^h ne se confondent pas, c'est que les deux droites ne peuvent avoir un point commun dont la projection verticale serait c^v; le point d'intersection ne saurait être non plus ailleurs, car les projections verticales ne se rencontrent en aucun autre point; donc les deux droites ne se coupent nulle part, ou, en d'autres termes, elles ne sont pas dans un même plan.

La figure 4 n'est qu'un nouvel exemple de la détermination du point de rencontre de deux droites avec des données placées dans des positions différentes.

19. Nous venons de voir comment on reconnaît que deux droites se rencontrent; examinons maintenant comment le parallélisme de deux droites est indiqué dans le mode de représentation employé en géométrie descriptive. Soient A^h et A^v (fig. 5), les deux projections d'une droite A; A^h, c'est par défi-

nition l'intersection du plan projetant de la droite A sur le plan horizontal avec ce dernier plan : ce plan projetant est complétement déterminé par cette double condition de passer par la droite et d'être perpendiculaire au plan horizontal de projection. Or, n'est-il pas évident que si une autre droite B est parallèle à la première, son plan projetant, déterminé aussi par cette double condition d'avoir à contenir la droite B et d'être perpendiculaire au même plan horizontal, sera parallèle au plan projetant de la droite A. Ces deux plans projetants étant parallèles, leurs intersections avec un même plan, le plan horizontal, sont aussi parallèles en vertu d'un principe démontré dans tous les traités de géométrie élémentaire. Ces intersections ce sont les projections des deux droites; donc, enfin, si les droites A et B sont parallèles, leurs projections sur le plan horizontal le sont également.

Le même raisonnement s'applique, sans y rien changer, aux projections verticales considérées avant le rabattement que l'épure suppose; et sa conclusion est par conséquent applicable aussi à ce qu'elles deviennent après le rabattement, car cette opération ne modifie en aucune façon les rapports de position que les différentes figures tracées sur le plan vertical ont entre elles.

Cette condition du double parallélisme des projections horizontales entre elles et des projections verticales entre elles, est d'ailleurs parfaitement suffisante ; car si l'on cherche à reconstruire les deux droites au moyen de leurs plans projetants, ces plans sont parallèles deux à deux comme passant par deux droites parallèles et étant perpendiculaires à un même plan, le plan de projection que l'on considère ; on sait que les intersections de ces plans entre eux seront nécessairement parallèles; et parmi ces intersections se trouvent les droites A et B elles-mêmes.

Cela posé, si par un point c de l'espace, donné par ses deux projections c^h et c^v, on veut mener une parallèle à une droite A, donnée (fig. 5) par ses deux projections A^h et A^v, il suffit de mener par les projections du point c les parallèles B^h et B^v, à A^h et A^v, pour avoir immédiatement les projections de la droite cherchée. La figure 6 est un autre exemple de cette solution réalisée dans d'autres circonstances.

IV. REPRÉSENTATION DU PLAN.

20. Lorsque l'on a plusieurs points à représenter sur une épure, rien n'empêche de les indiquer chacun par leurs deux projections; et l'on conçoit que tout système de points peut se prêter à ce mode de représentation. Il en est de même pour plusieurs droites dont chacune a ses projections distinctes, et qui, à l'aide de notations spéciales que nous aurons bientôt à indiquer en détail, peuvent se croiser dans tous les sens sans entraîner de confusion. Il n'en serait plus ainsi pour tous les points d'un plan. Un plan, c'est une surface indéfinie qui, à l'exception du cas où il serait perpendiculaire au plan de projection que l'on considère, est telle, que les projections de ses différents points couvriraient entièrement ce plan de projection, quelque prolongé qu'on le suppose. On ne saurait donc représenter commodément un plan par les projections de tous ses points, et la géométrie descriptive a recours à un autre mode de représentation au moyen des *traces* de ce plan sur les deux plans ordinaires de projection. On a déjà compris que les *traces* d'un plan, ce sont les intersections de ce plan avec les deux plans de projection; et ces lignes, comme les traces d'une droite, offrent cet avantage de peindre à l'esprit la véritable position du plan dans l'espace, car la trace horizontale est déjà une droite que le plan doit contenir; pour peu que l'on soit habitué à la méthode des projections, la vraie situation de la trace verticale avant le rabattement apparaît aussi de la manière la plus claire, et il en est de même, par conséquent, du plan qui passe par ces deux droites.

21. Il est à remarquer que la ligne de terre étant à la fois dans le plan horizontal et dans le plan vertical de projection, le point en lequel cette ligne est coupée par le plan donné, appartient à la fois aux trois plans, et, par conséquent, à la trace horizontale et à la trace verticale du plan que l'on considère, ce qui fait voir que les deux traces d'un plan se coupent toujours en un même point de la ligne de terre, comme, par exemple, les deux traces HP et VP du plan P dans la figure 1 de la planche III.

Cependant, pour que le plan soit parfaitement déterminé, il n'est pas nécessaire de connaître le point en lequel ses traces viennent rencontrer la ligne de terre : le plan Q (fig. 2) est tout aussi bien déterminé que le plan P; mais les deux droites HQ et VQ ne pourraient être les traces d'un même plan, si, prolongées, elles rencontraient la ligne de terre en des points différents.

22. Ce point de rencontre commun est à l'infini dans certaines circonstances, qu'il n'est pas inutile d'indiquer.

Si le plan donné est parallèle à la ligne de terre, son intersection avec l'un ou l'autre des deux plans de projection ne peut manquer aussi d'être parallèle à cette ligne, car si par un point quelconque de l'intersection commune on mène une parallèle à la ligne de terre, cette parallèle sera comprise à la fois dans le plan de projection et dans le plan donné : elle sera donc elle-même l'intersection; donc, la trace horizontale HP et la trace verticale VP du plan P seront toutes deux parallèles à la ligne de terre, comme dans la figure 3. Il suffirait d'ailleurs que l'une des traces fût parallèle à la ligne de terre pour que l'autre le fût également, puisque, ainsi que nous l'avons vu, les deux traces d'un même plan doivent toujours se couper sur la ligne de terre : si l'une des deux ne la rencontre pas, l'autre ne saurait non plus la rencontrer.

Il y a même un cas dans lequel l'une des deux traces n'existe plus : c'est, ainsi que le montre la figure 4, quand le plan donné est parallèle non plus seulement à la ligne de terre, mais à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple. Le plan horizontal n'étant plus rencontré par le plan donné qui lui est parallèle, la trace horizontale n'existe pas, et le plan est parfaitement déterminé par sa seule trace verticale, à la seule condition que l'on sache qu'il n'en a pas d'autre.

23. Nous mentionnerons encore quelques autres cas particuliers. Quand un plan (fig. 5) est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace de nom contraire est perpendiculaire à la ligne de terre, car, s'il s'agit, par exemple, d'un plan P perpendiculaire au plan vertical, ce plan et le plan horizontal de projection étant à la fois perpendiculaires au plan vertical,

leur commune intersection, qui n'est autre chose que la trace horizontale du plan, sera elle-même perpendiculaire au plan vertical, et, par conséquent, à la ligne de terre, qui peut être considérée comme une droite menée dans le plan vertical par le pied de la trace sur ce plan.

La figure 6 se rapporte à un plan qui est à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection : les deux traces se confondent et sont dans le prolongement l'une de l'autre suivant une perpendiculaire à la ligne de terre LT.

Remarques. Dans les trois derniers cas qui viennent de nous occuper, l'une des projections de chacun des points contenus dans le plan donné, est située sur la trace de ce plan; ce que l'on peut exprimer en disant que tout ce qui est contenu dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, se projette sur ce plan suivant la trace même du plan donné et cette trace peut être considérée comme la projection du plan.

Ce n'est pas dans le seul cas de la figure 6 que les deux traces se réduisent à une seule et même ligne droite; la figure 7 nous en offre un autre exemple auquel la figure 8 nous servira d'introduction. Si, dans la figure 1, nous avons donné aux angles que forment les traces avec la ligne de terre des grandeurs différentes, rien n'empêche cependant que ces deux angles soient égaux; alors le plan est symétriquement placé par rapport aux deux plans de projection. Si, en effet, on ramène par la pensée le plan vertical, maintenant couché sur l'épure, dans sa véritable position, on voit clairement que les deux droites qui déterminent la position du plan sont identiquement placées de la même manière, par rapport à la ligne de terre, et ce sont ces seules lignes qui fixent la position du plan.

Mais si les deux traces sont telles, en véritable position, qu'elles fassent avec la ligne de terre des angles supplémentaires l'un de l'autre, comme ces angles ne changent pas lors du rabattement, qui entraîne, sans aucune modification de position relative, le plan vertical et toutes les traces qu'il contient, β (fig. 7), après comme avant le rabattement, étant le supplément de α, la somme des deux angles α et β sera égale à deux angles droits, et par conséquent les deux droites HP, VP seront en ligne droite.

Il existe une telle position du plan pour chaque valeur arbitraire donnée à l'angle α.

24. Un plan est toujours parfaitement déterminé lorsque l'on connaît deux droites qu'il doit contenir; ses deux traces suffisent donc à cette détermination, mais il n'en serait plus de même si ses deux traces ne formaient en réalité dans l'espace qu'une seule et même ligne droite. Il est vrai que l'une des deux traces étant dans le plan horizontal et l'autre dans le plan vertical, ne sauraient se confondre avant le rabattement que dans cette seule circonstance où la ligne commune est la ligne de terre elle-même; alors, en effet, la connaissance de cette trace unique ne suffit plus à la détermination du plan, cette trace pouvant à la fois s'appliquer à toutes les positions que prendrait un plan quelconque passant par cette ligne de terre en tournant autour d'elle comme autour d'une charnière. C'est le seul cas dans lequel il soit nécessaire de connaître, en outre, les projections d'un des points du plan. C'est à cette nécessité que l'on est également conduit pour toute droite, qui, rencontrant la ligne de terre, lui serait normale.

La même indétermination n'existe pas dans le cas de la figure 7, encore bien que les deux traces se confondent sur l'épure, mais elles forment dans l'espace deux droites parfaitement distinctes qui suffisent complétement à fixer la position du plan.

25. En général, nous avons vu qu'un plan avait deux traces: la partie de ce plan comprise entre les deux traces est celle sur laquelle on doit plus particulièrement porter l'attention, si l'on veut parvenir à se le représenter dans sa véritable position. Ces traces, pourvu qu'elles se coupent en un point de la ligne de terre, peuvent d'ailleurs être dirigées d'une manière quelconque dans chacun des plans de projection, et ces lignes sont indéfinies comme le plan lui-même, car elles ne sont autre chose que l'intersection de deux plans. Ce serait donc se faire une idée fausse des traces d'un plan que de croire qu'elles se terminent à la ligne de terre. En ce qui concerne la trace horizontale, il faut la considérer comme une droite indéfinie dont une partie se trouve dans la partie antérieure du plan horizontal de

projection, et l'autre dans la partie postérieure; la trace verticale se prolonge de la même manière dans la partie supérieure et dans la partie inférieure du plan vertical; et ces deux droites réalisent dans l'espace cette figure géométrique bien connue de deux droites qui se coupent en formant entre elles quatre angles-plans opposés deux à deux par le sommet. Des notations spéciales que nous apprendrons bientôt à connaître, seront nécessaires pour éviter la confusion, qui pourrait naître de cet état de choses, entre ces lignes indéfinies qui sont pour nous la représentation du plan.

V. PROBLÈMES SUR LE PLAN ET SUR LA DROITE.

26. Afin de nous familiariser avec les considérations qui précèdent, et de bien nous habituer à voir au moyen d'une épure les points, les droites et les plans tels qu'ils sont dans l'espace, nous aborderons immédiatement un certain nombre de problèmes simples que l'on pourrait presque appeler des problèmes de lecture, parce qu'il suffit de lire convenablement le dessin pour que leur solution apparaisse d'elle-même.

27. Un point étant donné par ses projections et un plan par ses traces, comment reconnaître si le point est situé dans le plan?

Il semblerait à priori que cette vérification doive se présenter aussi simplement que lorsqu'il s'agit de reconnaître si un point est situé sur une droite; mais il faut ici avoir recours à des considérations différentes, parce que le plan n'est pas comme *la droite* représenté en géométrie descriptive par des projections. Si un point est dans un plan, toute droite qui passera par ce point et sera parallèle à une droite quelconque située dans ce plan, devra également y être tout entière contenue. Or, nous connaissons immédiatement la direction d'une des droites du plan P donné par ses traces HP, VP (Pl. IV, fig. 1). La trace horizontale HP est une droite de ce plan, et la projection verticale de cette droite est la ligne de terre elle-même. Si donc, par le point *m* de l'espace, nous menons une parallèle à HP, les projections de cette parallèle seront : l'une A^h parallèle à HP, et l'autre A^v parallèle à la ligne de terre. Cette droite ne rencontre pas le

plan horizontal, puisqu'elle est parallèle à ce plan, mais elle a pour trace verticale le point n^v obtenu en élevant la perpendiculaire $n^h n^v$ à la ligne de terre par le point n^h de rencontre de A^h avec cette même ligne.

Or, VP, c'est la trace du plan P; ce plan ne saurait avoir, avec le plan vertical de projection, de points communs que sur cette ligne VP; donc il faut que n^v soit sur VP pour que le point m soit dans ce plan. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car elle exige que le point soit situé sur une droite contenue tout entière dans ce plan.

Les mêmes considérations amèneraient à conclure que la trace horizontale p^h de la droite B, menée par le point m parallèlement à VP doit se trouver sur la trace horizontale HP du plan donné P; mais si la première condition est satisfaite, celle-ci le sera nécessairement.

28. De là une règle fort simple pour résoudre le problème suivant : Étant donnée la projection d'un point situé dans un plan, trouver l'autre projection. m^h est donné, et il faut construire m^v, de manière que le point m soit dans le plan P. Menons par m^h la projection horizontale de l'horizontale A^h; mettons n^h en projection verticale, c'est-à-dire déterminons sur VP la projection verticale de ce point; traçons A^v parallèlement à la ligne de terre, et enfin mettons m^h en projection verticale sur A^v; m^v sera le point cherché.

29. La droite A que nous venons de considérer, est ce que l'on appelle avec raison une horizontale du plan, parce qu'effectivement elle est une ligne horizontale contenue dans le plan; mais la désignation de verticale du plan, donnée la plupart du temps, en géométrie descriptive, à la droite B, parallèle à la trace verticale du plan, n'est pas comme la première à l'abri de toute critique, puisque réellement une telle ligne n'est pas verticale. Quoi qu'il en soit, nous nous en servirons fréquemment, et nous remarquerons que cette verticale B du plan P, peut tout aussi bien être employée que l'horizontale A de ce même plan, pour reconnaître si le point m y est situé.

Quand le plan donné occupe certaines positions particulières, les mêmes raisonnements sont toujours applicables. La figure 2

donne un exemple de cette vérification dans des conditions différentes.

30. Pour savoir si une droite est située dans un plan, il n'est plus besoin d'avoir recours à des constructions auxiliaires; la considération des traces suffit à la vérification. En effet, la trace d'une droite étant le point même en lequel cette droite vient percer le plan de projection, est un des points de la trace de tout plan qui passerait par cette droite. Si donc une droite est située dans un plan, la trace horizontale de la droite sera sur la trace horizontale du plan, et sa trace verticale sera également sur la trace verticale de ce plan; d'ailleurs cette condition est suffisante, car une droite est complétement déterminée de position par ses deux traces; et quand elle a deux points communs avec le plan, on sait qu'elle y est tout entière.

La droite A (fig. 3) est dans le plan P, parce que les conditions précédentes sont à la fois satisfaites. Si la trace a^h de la droite se trouvait sur la trace HP du plan P, sans qu'il en fût de même du point b^v par rapport à VP, la droite A ne serait pas dans ce plan.

31. Nous pouvons dès lors résoudre d'une manière très-simple le problème suivant : Étant donnée une des projections A^h d'une droite A, construire sa projection verticale, par cette condition que la droite A est dans le plan P.

A^v est donné en même temps que HP et VP; nous connaissons donc a^v et b^v, nous mettons ces deux points en projection horizontale, le premier sur HP, le second sur la ligne de terre, et joignant ces deux projections horizontales a^h et b^h, nous obtenons la projection cherchée A^h.

La figure 4 est un autre exemple de cette même recherche : la notation seule suffit pour la suivre sur l'épure.

32. Un plan est complétement déterminé lorsque l'on connaît deux droites qu'il renferme : construire ses traces est chose fort simple, car la trace verticale doit passer par les traces verticales des deux droites, et de même la trace horizontale est la ligne droite qui passe par leurs deux traces horizontales respectives.

Le plan P représenté, figure 5, par les traces HP et VP, ren

ferme en effet les deux droites A et B, puisque les traces du plan contiennent les traces des deux droites.

Cette construction, ainsi qu'on peut le voir figures 5 et 6, conduit à une vérification qui consiste en ce que les deux traces viennent nécessairement se couper en un point de la ligne de terre. Sans cela elles ne sauraient être les traces d'un même plan.

On pourrait, dans le cas de la figure 6 par exemple, se contenter, pour tracer la trace horizontale, du point p et de la trace horizontale a^h de l'une des droites.

Observation. Pour que deux droites puissent déterminer un plan, il faut qu'elles se coupent ou qu'elles soient parallèles, ce qui exige dans le premier cas, que le point de rencontre de leurs projections horizontales et celui de leurs projections verticales soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; et dans le second cas, que leurs projections soient respectivement parallèles.

Le tracé reste absolument le même s'il s'agit de faire passer un plan par trois points, car ces trois points joints deux à deux fournissent trois droites, et deux d'entre elles arbitrairement choisies, sont suffisantes pour la détermination des traces du plan cherché; quelles que soient celles de ces lignes dont on fasse choix pour trouver les traces du plan, on arrive nécessairement au même résultat, car elles sont toutes contenues dans un même plan qui est le plan cherché.

33. On dit en géométrie : qu'une droite est parallèle à un plan, lorsque cette droite et ce plan ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'un et l'autre, et cette définition est encore applicable lorsque l'on considère deux plans parallèles.

C'est en partant de cette définition, que l'on arrive à démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, toutes les fois que l'on peut tracer dans ce plan une parallèle à la droite. Cette propriété fournit à la géométrie descriptive les moyens de reconnaître si un plan donné est parallèle à une droite donnée. HP et VP (Pl. 5, fig. 1) sont les traces du plan, A^h et A^v les projections de la droite. Par un point quelconque m du plan, que

pour plus de simplicité je choisis dans le plan horizontal, et qui aura par conséquent pour projections m^h et m^v, m^h étant situé sur HP, et m^v sur la ligne de terre, je mène une parallèle B à A : les projections de B seront respectivement parallèles aux projections de A ; elles sont tracées en B^h et B^v, et puisqu'elles sont ainsi déterminées, je connais immédiatement en n^v la trace verticale de cette droite B, en mettant n^h en projection verticale ; si n^v tombe sur VP, le plan P est parallèle à la droite A, car il contient une parallèle B à cette droite ; dans le cas contraire ce parallélisme n'existe pas.

Cette condition étant reconnue suffisante et nécessaire, nous pouvons résoudre en quelques mots les questions qui se rapportent au parallélisme des droites et des plans.

34. *Par un point donné mener une parallèle à un plan donné.*

Cette question est indéterminée, car par un point on peut toujours mener une infinité de parallèles à un plan. Considérons une ligne quelconque B du plan, si par le point donné a, nous menons une parallèle à cette droite, elle satisfera à la condition énoncée. A (fig. 2) sera cette parallèle représentée par les deux projections A^h et A^v.

Autant on peut mener de droites dans le plan P, autant on obtiendra ainsi de parallèles à ce plan : on en pourrait trouver une infinité, mais toutes sont contenues dans un même plan Q, parallèle au plan donné.

35. *Par un point donné mener un plan parallèle à une droite donnée.*

Le problème est également indéterminé, car ces conditions ne suffisent pas pour fixer la position du plan.

Le plan cherché doit passer par le point m, et être parallèle à A, donc il doit contenir la parallèle B menée par le point m à la droite A ; et s'il satisfait à cette condition, il satisfera à toutes les conditions de l'énoncé. A^h et A^v (fig. 3) sont les projections de A ; par conséquent B^h et B^v les projections de la parallèle B ; et tout plan P dont les traces passeront respectivement par les traces de B, sera, comme l'indique l'épure, parallèle à la droite A, car il satisfait à la seule condition nécessaire pour le parallélisme, et il passe par le point m.

36. *Par une droite donnée mener un plan parallèle à une droite donnée.*

La même indétermination n'existe plus, la position du plan cherché n'a plus rien d'arbitraire, elle est parfaitement fixée par cette double condition pour le plan, de contenir la droite M, et d'être parallèle à A. Prenons sur M un point quelconque m, et concevons que l'on ait mené par ce point une droite B parallèle à A; le plan qui passera par M et par B remplit toutes les conditions que l'on désire, et il se trouve ainsi obtenu de la manière la plus simple.

m^h et m^v (fig. 4) sont les projections du point m pris arbitrairement sur la droite (M^h, M^v); B^h, B^v sont les projections de la droite B; a^h est une des traces de B, l'autre serait située hors du cadre; p^h et q^v sont les traces de M; enfin HP et VP sont les traces du plan P cherché.

37. Si deux plans parallèles P et Q sont rencontrés par un troisième (H ou V) situé, par rapport aux premiers, d'une manière quelconque, les deux intersections sont deux droites parallèles. Donc (fig. 5), pour que deux plans soient parallèles, il faut que les traces horizontales et les traces verticales soient respectivement parallèles, comme HP et HQ, VP et VQ.

Cette double condition est suffisante : la position de chacun des deux plans est parfaitement déterminée par la connaissance de ses deux traces.

38. La seule application que nous donnerons de ce principe est celle-ci : *Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné.*

P (fig. 6) est le plan donné par ses traces, m le point connu par ses projections; il faut faire passer par le point m un plan Q dont les traces soient respectivement parallèles aux traces du plan P. Nous obtiendrons une horizontale de ce plan en menant, par les projections du point m, C^h parallèle à HP et C^v parallèle à la ligne de terre; la trace c^v de cette droite est dès lors connue; menant par c^v une parallèle à VP, nous obtenons la trace verticale VQ du plan cherché; cette trace vient rencontrer la ligne de terre en un point p qui appartient à la trace horizontale du plan Q, puisque les deux traces d'un même plan se rencontrent

toujours sur la ligne de terre; donc il suffit de mener par ce point *p* la droite HQ parallèle à HP, pour que la seconde trace du plan Q soit également déterminée.

39. Quoique nous ne nous soyons pas occupé jusqu'ici de la condition de perpendicularité de deux droites, parce qu'elle ne peut s'exprimer graphiquement d'une manière simple, nous ne passerons pas sous silence celle qui est relative au cas d'une droite et d'un plan perpendiculaires entre eux.

Si une droite A *est perpendiculaire à un plan* P, *la projection* A^h *est perpendiculaire à la trace* HP.

Pour le démontrer, considérons le plan projetant X de la droite A; il est perpendiculaire au plan P, puisqu'il renferme la perpendiculaire A à ce plan; donc il est à la fois perpendiculaire au plan horizontal de projection et au plan P; donc il est perpendiculaire à la commune intersection de ces deux plans, c'est-à-dire à la trace HP; donc, enfin HP perpendiculaire au plan X, est perpendiculaire à toute droite qui passe par son pied dans ce plan, et en particulier à la droite A^h qui n'est autre chose que la projection de la droite A.

Le même raisonnement est applicable en ce qui concerne le plan vertical, et l'on peut énoncer le principe suivant : Toutes les fois qu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces de même nom du plan.

Cette condition est suffisante pour que la droite et le plan soient perpendiculaires l'un à l'autre, car elle fixe d'une manière certaine les directions respectives des traces du plan, et par conséquent la direction même de ce plan dans l'espace.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, réciproquement ce plan est perpendiculaire à la droite; ce qui prouve que la condition précédente pourra être également invoquée, soit pour tracer une droite normale à un plan, soit pour tracer un plan perpendiculaire à une droite. Nous offrirons un exemple de chacun de ces problèmes.

40. *Mener par un point donné une perpendiculaire à un plan donné.*

Par le point *m* (Pl. VI, fig. 1) il faut mener une perpendicu-

laire au plan P. Soit A cette perpendiculaire, on obtiendra A^h en menant par m^h une perpendiculaire à HP, et la projection verticale, en abaissant de m^v la perpendiculaire A^v sur VP.

41. *Mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite donnée.*

Par le point m (fig. 2) il faut mener un plan P perpendiculaire à la droite A. HP sera perpendiculaire à A^h, VP à A^v. De la connaissance de ces directions, il résulte que nous pourrons immédiatement obtenir une horizontale ou une verticale de ce plan P. Voulons-nous avoir une verticale, nous savons que sa projection verticale doit être parallèle à la trace verticale du plan, et par conséquent être comme cette trace perpendiculaire à la projection A^v de la droite donnée; donc B^v qui passe par m^v, sera la projection de cette verticale du plan P, dont les traces nous sont inconnues encore, et sa projection horizontale sera $B_{//}$, menée par m^h, parallèlement à la ligne de terre. La trace a^h de cette droite est sur la trace HP encore inconnue du plan; par conséquent nous obtenons cette trace en menant par a^h la perpendiculaire HP à la projection horizontale A^h de la droite A. Le point p qui appartient à la fois aux deux traces, nous donne le moyen d'obtenir ensuite VP, en abaissant du point p une perpendiculaire sur A^v.

Le plan ainsi construit contient le point m, car il contient la ligne B qui passe par ce point, et il est perpendiculaire à la droite A, car ses traces sont respectivement perpendiculaires aux projections de cette droite. On arriverait au même résultat en se servant d'une horizontale du plan cherché.

42. Il faut bien observer que c'est seulement dans le cas d'une droite et d'un plan perpendiculaires entre eux, que les lignes qui représentent le plan sur les plans de projection sont respectivement perpendiculaires aux lignes qui représentent la droite. Cette relation géométrique n'existe plus, ni pour des droites perpendiculaires entre elles, ni pour des plans perpendiculaires entre eux; mais dans ces cas encore on peut faire servir indirectement le principe que nous venons de poser, pour arriver à la solution des problèmes sur des droites ou sur des plans respectivement perpendiculaires. Voici quelles sont

à cet égard les constructions dont on a le plus fréquemment besoin en géométrie descriptive.

43. *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée.*

L'épure 2 de la planche 6 nous a appris à mener par un point m un plan P perpendiculaire à une droite donnée A. Il est clair que si, après avoir mené un pareil plan, nous parvenions à connaître le point n en lequel ce plan est rencontré par la droite A, il suffirait de joindre le point m au point n par une droite, qui serait la perpendiculaire cherchée.

Mais nous ne savons pas jusqu'ici trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, et nous n'apprendrons à le faire qu'au moment où nous nous occuperons des intersections en général. Voici donc un problème fort simple dont la solution ne peut être obtenue par les considérations qui précèdent. Nous aurons d'ailleurs à fournir différentes solutions de cette question importante, soit par la méthode des changements de plan, soit par la méthode des mouvements de rotation qui résolvent tous les problèmes élémentaires, sans exiger que l'on détermine les intersections des lignes ou des plans que l'on a à considérer; intersections qui se trouvent souvent en dehors du papier de l'épure sur lequel les données sont écrites.

44. *Par un point donné mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

Nous savons à priori que ce problème est indéterminé, car par un point m on peut mener une infinité de plans Q perpendiculaires à un même plan P; mais malgré cette indétermination, il n'est pas inutile d'aborder en géométrie descriptive des problèmes de ce genre, parce qu'ils mettent en lumière toute la rigueur des méthodes graphiques.

Nous savons mener par le point m (fig. 3) une perpendiculaire au plan P; les projections de cette perpendiculaire sont, ainsi que nous l'avons vu (40), les perpendiculaires A^h et A^v respectivement abaissées des points m^h et m^v sur les deux traces du plan P.

Cette droite étant obtenue, comme nous savons également que tout plan qui la contiendra sera perpendiculaire au plan P, la

seule condition à laquelle doive satisfaire le plan cherché, consiste donc en ceci, que ses traces passent par les traces a^v et b^h de la droite A. Prenant donc arbitrairement un point p sur la ligne de terre, et menant pa^v et pb^h, nous obtenons immédiatement les traces HQ et VQ d'un plan qui passe par le point m, et qui est perpendiculaire au plan P, car il contient la droite A qui jouit elle-même de ces deux propriétés.

45. *Par une droite donnée mener un plan perpendiculaire à un plan donné.*

De ce que le problème précédent est susceptible d'une infinité de solutions, nous pouvons conclure qu'il est possible d'imposer au plan Q que nous cherchons une condition de plus. Au lieu de le faire passer par un seul point m, nous exigerons qu'il contienne deux points donnés arbitrairement m et n; ou, ce qui revient au même, qu'il renferme une droite donnée B.

Si le plan cherché doit contenir la droite A (fig. 4) il faut et il suffit à cet égard que les traces de ce plan passent par les traces c^h et d^v de la droite. Ayant donc abaissé du point m une perpendiculaire A sur le plan P, et cherché les traces de cette nouvelle droite comme précédemment, le problème se réduit à faire passer le plan Q par les deux droites A et B qui se coupent au point m. HQ est la droite qui passe par a^h et c^h, VQ s'obtient également en joignant les traces verticales b^v et d^v. Comme vérification, ces deux traces qui définissent le plan Q, doivent rencontrer la ligne de terre au même point q.

VI. REPRÉSENTATION DES LIGNES COURBES.

46. De même que la ligne droite est le plus simple des éléments géométriques n'ayant qu'une seule dimension, la longueur, de même aussi le plan est celle des surfaces dont la détermination est la plus simple, soit dans les arts lorsqu'il s'agit d'en construire, soit en géométrie descriptive lorsqu'il s'agit seulement de le représenter, et cette science serait bien imparfaite si les moyens généraux dont nous venons de passer en revue quelques applications ne pouvaient s'appliquer à ces éléments moins simples dont nous ne nous sommes pas occupé jusqu'ici.

Une ligne, avons-nous dit, est la trajectoire d'un point dans l'espace, et l'on conçoit que si un point matériel, qui, livré à lui-même après avoir acquis une première vitesse initiale, continuerait à se mouvoir indéfiniment en ligne droite, venait à être soumis à l'action d'une nouvelle force, cette force, quelle que soit son intensité, aurait pour effet de déranger ce point de sa route rectiligne, et par conséquent de faire de sa trajectoire une ligne brisée. Mais si cette action nouvelle variant, si l'on veut, d'intensité, au lieu de se manifester une seule fois, comme nous l'avons supposé tout à l'heure, se répète d'instant en instant, la direction changera à chaque action nouvelle, et la trajectoire se composera d'une succession d'éléments linéaires rectilignes d'autant plus petits, que les actions se seront plus rapidement succédé.

Rien ne saurait, plus utilement que cette image, donner une idée exacte de ce que l'on appelle une ligne courbe; ce n'est autre chose qu'une succession d'éléments infiniment petits, une sorte de polygone infinitésimal dont les éléments invisibles n'en existent pas moins en variant de position les uns par rapport aux autres. Quel que soit donc le point que l'on veut considérer sur une courbe, ce point est toujours situé sur un élément rectiligne formé par la ligne droite qui joint ce point avec le point voisin que l'on appelle le point *successif*. Ces deux points sont tellement rapprochés l'un de l'autre, que l'on ne pourrait concevoir qu'il fût possible de trouver un autre point plus rapproché du premier.

Une ligne droite est partout semblable à elle-même, en ce sens qu'une portion quelconque de cette ligne peut se superposer exactement sur toute autre portion de cette ligne ou de toute autre ligne droite, mais l'inclinaison des éléments successifs variant en général dans les courbes, cette superposition n'est plus possible, et le seul moyen d'apprécier en chaque point cette inclinaison des éléments voisins, c'est la considération de la *tangente,* que nous définirons par ce seul mot qu'elle est le prolongement de l'élément linéaire de la courbe au point que l'on considère.

Lorsque nous aurons à construire des courbes par points, la tangente nous sera d'un grand secours, en ce qu'elle nous permettra de tracer avec plus de sécurité la ligne courbe dont elle

contient un des éléments, et l'on concevra très-facilement l'utilité de la tangente, en remarquant que si l'on connaissait les tangentes successives d'une courbe, la succession de ces tangentes dessinerait cette courbe avec une précision tout à fait rigoureuse.

47. La projection d'une courbe s'obtient, comme celle d'une droite, par le lieu des projections de ses points, et la recherche de cette projection nous offre un premier exemple de la construction d'une courbe par points. On peut bien, en effet, obtenir exactement les projections d'un aussi grand nombre de points que l'on voudra d'une courbe donnée; mais il serait impossible de les obtenir toutes, puisque, quelque petite que soit la courbe que l'on considère, elle est encore composée d'une infinité d'éléments rectilignes : supposons donc que l'on ait obtenu un très-grand nombre de ces projections, il est évident que si, dans l'espace, un point m est lié par une ligne continue à un autre point n plus ou moins voisin, la ligne qui formera la projection de la courbe qui contient m et n sera aussi telle qu'elle joindra d'une manière continue la projection m^h du point m à la projection n^h de l'autre point, et pour effectuer le tracé de cette projection, il faudra faire une appréciation plus ou moins arbitraire de la forme de la projection entre les deux points m^h et n^h : cet arbitraire, le dessinateur a la liberté de le restreindre autant qu'il le veut, en rapprochant davantage les points m et n; mais il lui serait impossible de l'annihiler entièrement, car il ne saurait assigner la position précise du point immédiatement successif de m : ni ses organes, ni ses instruments ne peuvent le lui permettre.

48. Une courbe, dans l'espace, peut être plane ou à double courbure : pour être plane, il faut que tous ses points soient dans un même plan; elle est à double courbure lorsque cette circonstance n'est pas réalisée. La projection d'une courbe quelconque est toujours une courbe plane qui peut même se réduire à une droite dans le cas où la courbe donnée étant plane se trouverait tout entière contenue dans le plan projetant de deux de ses points.

Pour qu'une courbe se projette suivant une ligne droite, il

faut nécessairement qu'elle soit plane, car toute ligne droite tracée sur l'un des plans de projection correspond à un plan projetant dans lequel la courbe devra se trouver tout entière si elle se projette suivant l'intersection droite de ce plan avec le plan de projection.

Il y a même une position pour laquelle une courbe plane a ses deux projections rectilignes : c'est ce qui arrive lorsque le plan de cette courbe est perpendiculaire à la ligne de terre; on n'a plus alors, par les projections, les données nécessaires pour apprécier sa véritable forme dans l'espace.

49. En général, ce n'est pas un plan qui projette une courbe, mais une surface formée de la succession des perpendiculaires abaissées des différents points de la courbe sur l'un des plans de projection; toutes ces perpendiculaires étant parallèles entre elles, nous verrons bientôt qu'elles forment par leur réunion ce que l'on appelle une surface cylindrique.

Le plan projetant que nous avons eu à considérer jusqu'ici est donc remplacé par un cylindre projetant, qui joue le même rôle en géométrie descriptive : la courbe dans l'espace est complétement déterminée, en général, par ses deux projections, car elle n'est autre chose que la courbe d'intersection des deux cylindres qui la projettent sur les deux plans de projection.

50. Les courbes diffèrent les unes des autres par leur mode de génération, ou, en d'autres termes, par les conditions du mouvement de ce point matériel dont elles représentent la trajectoire, comme nous l'avons déjà dit. Les unes sont fermées comme le cercle, l'ellipse; les autres, comme la parabole, l'hyperbole, l'hélice, sont ouvertes et ont alors des branches infinies; elles jouissent les unes et les autres de propriétés particulières que l'analyse et la géométrie descriptive peuvent également mettre en lumière; nous n'aurons à nous occuper ici que de celles qui sont l'intersection de certaines surfaces dont l'étude formera l'une des principales divisions de cet ouvrage : nous aurons alors à donner les développements convenables à l'étude de quelques-unes de ces propriétés.

51. Mais nous pouvons dès à présent faire pour les courbes

ce que nous avons fait pour la ligne droite, rechercher leurs *traces*, c'est-à-dire les points en lesquels elles rencontrent les plans de projection.

Une droite étant une ligne indéfinie, a toujours des traces, à moins qu'elle ne soit parallèle au plan de projection que l'on considère, auquel cas elle ne saurait le rencontrer; ce n'est effectivement que pour cette position particulière de parallélisme qu'une droite n'a plus qu'une trace, et c'est seulement quand elle est parallèle à la fois aux deux plans de projection, ou, ce qui revient au même, à la ligne de terre, qu'elle n'en a plus aucune, ou plutôt que ces traces sont toutes deux situées à l'infini.

Pour qu'une courbe n'ait point de trace sur l'un des plans de projection, c'est-à-dire pour qu'elle ne le rencontre pas, il n'est pas nécessaire qu'elle soit ainsi placée dans une position tout exceptionnelle. Un cercle, par exemple, qui est une courbe fermée, peut prendre dans l'espace une infinité de positions dans lesquelles il ne rencontre ni l'un ni l'autre des plans de projection.

Mais il est toujours facile, lorsqu'une courbe est donnée par ses projections, de reconnaître si elle a ou si elle n'a pas de trace. S'agit-il, par exemple, de la trace horizontale, il suffit de voir, d'après la seule inspection de l'épure, si la projection verticale de la courbe rencontre la ligne de terre soit sur l'épure même, soit en dehors des limites de l'aire dont on dispose pour le tracé.

Si la projection verticale rencontre la ligne de terre, il y a nécessairement au moins autant de traces horizontales qu'il y a de points de rencontre, car tout point qui se projette verticalement sur la ligne de terre est situé dans le plan horizontal; et pour obtenir la trace correspondante, il suffit, comme pour le cas d'une droite, d'élever en ce point une perpendiculaire à la ligne de terre et de chercher son intersection avec la projection horizontale de la courbe.

Au reste, les traces d'une courbe n'offrent pas le même intérêt que celles d'une droite, en ce qu'elles ne suffisent plus pour déterminer la véritable forme et la véritable position de la ligne à laquelle elles appartiennent, une infinité de courbes différentes pouvant avoir les mêmes traces.

VII. REPRÉSENTATION DES SURFACES COURBES *.

52. De même qu'une courbe ou plus généralement une ligne quelconque peut être considérée comme la trajectoire d'un point, de même aussi une surface peut être considérée comme la trajectoire d'une courbe assujettie dans son mouvement à certaines lois et à certaines modifications qui caractérisent le mode de génération de cette surface.

Nous aurons plus particulièrement à étudier dans ces éléments trois genres de surfaces; les surfaces *cylindriques*, les surfaces *coniques*, et les surfaces *de révolution*.

53. La surface cylindrique est le lieu de toutes les positions d'une droite qui se meut parallèlement à elle-même en s'appuyant constamment sur une courbe donnée que l'on appelle la *directrice* du cylindre; la droite, qui engendre le cylindre, en est dite la *génératrice*.

Cette définition convient, comme on le voit, au cylindre à base circulaire, droit ou oblique, dont la géométrie élémentaire étudie les propriétés; mais ce cylindre n'est qu'un cas particulier de la surface cylindrique considérée en général.

Lorsque la directrice est une ligne droite, la génératrice s'appuyant constamment sur cette droite et restant toujours parallèle à elle-même, ne sort point du plan qui, passant par sa position première, contiendrait aussi la directrice rectiligne : à ce point de vue, le plan est donc un cylindre, et nous pourrons, lorsqu'il en sera besoin, le considérer comme décrit par le mode de génération cylindrique.

54. La surface conique est le lieu de toutes les positions d'une droite qui, assujettie à passer toujours par le même point, qui s'appelle le *sommet* du cône, se meut en s'appuyant toujours sur une courbe directrice.

---

* Les quelques indications qui suivent, sur la représentation des courbes et des surfaces en géométrie descriptive, devaient être présentées ici pour faire comprendre toute la fécondité de ce mode de représentation. Rien n'empêchera, dans l'enseignement oral, de ne les présenter qu'au moment où l'on s'occupera plus particulièrement des surfaces courbes.

D'après cette définition, le cône à base circulaire n'est qu'un cas particulier de la génération conique, celui dans lequel la directrice est une circonférence, et le plan lui-même peut être considéré comme un cône dont la génératrice est une ligne droite. Une droite, en effet, qui se meut en s'appuyant toujours sur une autre droite et en passant toujours par un point fixe, parcourt réellement le plan tout entier, qui passe par la directrice droite et le point donné.

On conçoit qu'avec une même directrice on puisse construire une infinité de cônes différents en modifiant la position du sommet, et si l'on imagine que ce sommet se soit lui-même transporté à l'infini, toutes les génératrices ne pouvant plus se rencontrer qu'à l'infini, deviennent des lignes parallèles : c'est en ce sens qu'il faut entendre que la surface cylindrique elle-même peut être considérée comme un cas particulier du cône, celui dans lequel le sommet de ce cône est à l'infini.

54 *bis*. La surface de révolution est le lieu de toutes les positions d'une courbe qui se meut en tournant autour d'un axe fixe, chacun de ses points décrivant une circonférence autour de cet axe.

La sphère est une surface de révolution, car on peut la considérer comme engendrée par un de ses grands cercles qui tournerait autour d'un diamètre de ce cercle; le cône droit à base circulaire est une surface de révolution engendrée par une génératrice droite qui tourne autour de l'axe même du cône. Il en est de même du cylindre droit à base circulaire, qui n'est qu'une modification apportée à ce cône par le transport de son sommet à l'infini.

Une courbe quelconque peut de même tourner autour d'un axe *de rotation* : si c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole qui tournent autour d'un de leurs axes *de figure*, les surfaces que l'on obtient sont appelées *ellipsoïde*, *paraboloïde*, *hyperboloïde* de révolution. Nous verrons que cette dernière surface peut aussi être engendrée par une droite tournant autour d'un axe qui n'est pas avec elle dans un même plan.

55. Les surfaces dont nous venons de parler, et en particulier les surfaces coniques et cylindriques sont d'un fréquent

usage dans les arts : il est, au point de vue pratique, de la plus haute importance de se familiariser avec ces surfaces et d'apprendre à obtenir sur le papier tous les éléments nécessaires, soit à les construire dans des conditions données, soit à déterminer leurs sections par des plans ou leurs intersections entre elles.

Les surfaces cylindriques et coniques jouissent d'ailleurs de cette propriété remarquable qu'elles peuvent être développées sur un plan sans déchirure ni duplicature, ce qui ne saurait avoir lieu en général pour les surfaces de révolution; aussi leur a-t-on plus particulièrement donné le nom de surfaces *développables*.

Si l'on conçoit que les génératrices d'un cône ou d'un cylindre soient indéfiniment prolongées, elles ne cesseront pas d'appartenir à ces surfaces qui ont toujours, en tant que considérées comme surfaces géométriques, des points situés à l'infini. Les surfaces coniques ont toujours deux nappes séparées par le sommet, mais lorsque le sommet est situé à l'infini, l'une de ces nappes seule subsiste et le cône devient un cylindre.

Quant aux surfaces de révolution, elles sont plus ou moins prolongées suivant la nature de la courbe génératrice : une sphère, un ellipsoïde de révolution sont limités en tous sens; un paraboloïde de révolution n'a qu'une nappe infinie comme les paraboles elles-mêmes, et suivant que l'hyperboloïde a pour axe de rotation l'un ou l'autre des axes de figure de l'hyperbole génératrice, sa surface se compose d'une seule nappe ou de deux nappes infinies.

56. Parmi les surfaces courbes qui offrent aussi un certain intérêt dans les arts, nous citerons encore les surfaces *réglées* dont le mode de génération consiste dans le mouvement d'une droite qui s'appuie sur trois directrices droites ou courbes, ou sur deux directrices droites ou courbes en satisfaisant d'ailleurs pendant son mouvement à certaines conditions déterminées; mais nous aurons bien peu, dans le courant de cet ouvrage, à considérer ce genre de surfaces, dont on se sert cependant dans plusieurs des applications de la géométrie descriptive, et en particulier dans la coupe des pierres.

56 *bis*. Toutes les surfaces dont nous venons de parler jouis-

sent d'une propriété remarquable : en chacun de leurs points il existe un plan qui contient à la fois les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface, et qui passent par le point que l'on considère. En parlant de chacune de ces surfaces en particulier, nous aurons soin de démontrer l'existence de ce plan tangent, et nous verrons de quel secours nous sera ce plan pour mener des tangentes aux différentes courbes. Pour le moment nous nous bornerons à indiquer comment on représente ces surfaces dans la méthode des projections.

57. La convention qui définit les projections d'un point étant admise, nous avons vu qu'une droite ou une courbe quelconque se trouve parfaitement déterminée au moyen de ses deux projections, et sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à aucune considération étrangère à la définition même; il n'en est pas ainsi pour une surface, ni même pour le plan; ses traces ne suffisent à représenter la surface que si l'on se reporte à son mode de génération : bien des surfaces en effet pourraient avoir les mêmes traces et n'être pas pour cela des surfaces planes; le plan n'est vraiment défini rigoureusement que si, à la connaissance de ses traces, on ajoute cette considération que toute la surface doit se confondre avec le plan passant par les deux traces.

S'il est ainsi nécessaire de sous-entendre le mode de génération du plan, à plus forte raison faut-il donner des indications précises relativement au mode de génération toujours moins simple des autres surfaces.

a. Représentation du cylindre.

58. Un cylindre est parfaitement déterminé lorsque l'on connaît la courbe qui lui sert de directrice et la direction de ses génératrices. Cette direction peut être donnée par celle d'une droite parallèle; quant à la directrice, il faut qu'elle soit donnée par les projections de sa position vraie dans l'espace; mais, comme toute courbe tracée sur le cylindre peut lui servir de directrice, quelque compliquée que soit sa forme, il est bon de choisir celle qui peut le plus utilement servir à peindre l'al-

lure, la forme de la surface, surtout si elle se représente par des projections d'une grande simplicité. Telle est la trace du cylindre sur l'un des plans de projection, car cette trace est une courbe plane, qui est elle-même sa projection sur ce plan, et dont l'autre projection se confond avec la ligne de terre; et rien n'est plus facile d'ailleurs que de se représenter, dans ce cas, la forme réelle du cylindre : car la directrice étant tracée en vraie grandeur sur le papier, pour peu que l'on sache se rendre compte de la position d'une génératrice, elles apparaîtront toutes avec la même facilité à l'inspection seule du dessin.

58 *bis*. *Étant donnée la directrice d'un cylindre trouver sa trace.*

Soient D^h et D^v (Pl. VII, fig. 1) les deux projections de la directrice d'un cylindre dont les génératrices doivent être parallèles à une droite A, également donnée par ses projections; si l'on considère celle des génératrices qui passe par le point m, arbitrairement choisi sur la directrice, les deux projections seront G^h et G^v; et puisque cette droite est tout entière sur le cylindre, si elle vient rencontrer le plan horizontal de projection, par exemple, cette trace horizontale de la droite fera nécessairement partie de la trace horizontale du cylindre, ce qui donne ainsi le point n qui appartient à la trace cherchée.

On opérerait ainsi pour tout autre point m, aussi rapproché que l'on voudra du point que nous venons de considérer, et l'on obtiendrait une suite de points très-rapprochés les uns des autres, qui appartiendraient tous à la trace cherchée; joignant ces points par un trait continu, on construira avec toute la précision que l'on aura voulu y apporter, la courbe qui forme la trace du cylindre.

Dans tous les problèmes que nous aurons à résoudre sur cette surface, nous supposerons qu'elle est connue par cette trace, et par une parallèle quelconque à ses génératrices.

Ce que nous venons de dire du cylindre, nous aurions pu le présenter d'une manière plus générale pour le cône, et quelques mots suffiront pour le faire comprendre.

59. *Reconnaître si un point donné appartient à un cylindre donné.*

Les considérations qui précèdent nous permettent de résou-

dre immédiatement cette question. Si le point p, par exemple, est sur le cylindre représenté sur notre figure 1, il se trouve nécessairement sur une certaine génératrice G de ce cylindre, et nous connaissons immédiatement les projections de cette génératrice, puisqu'elles doivent passer respectivement par les projections du point p et être, par définition, parallèles aux projections de la droite A. Cette génératrice rencontre la directrice D, et par conséquent les deux projections m^h et m^v du point de rencontre de cette génératrice avec les projections D^h et D^v de la directrice doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Telle est la condition pour que le point p soit sur le cylindre; elle est d'ailleurs suffisante, car si la droite G, menée par le point p parallèlement à la droite A, rencontre la directrice D, elle est par définition même une des génératrices du cylindre.

Ce mode de vérification est absolument le même lorsque le cylindre est donné par sa trace, et il permet de trouver l'une des projections d'un point situé sur un cylindre, la projection verticale, par exemple, lorsque la projection horizontale seule est connue.

b. Représentation du cône.

60. Un cône est parfaitement déterminé lorsque l'on connaît son sommet et sa directrice; mais on peut aussi considérer comme telle une courbe quelconque tracée sur sa surface, et plus particulièrement la courbe qui est la commune intersection du cône et de l'un des plans de projection, c'est-à-dire sa trace sur ce plan.

Cette trace du cône, quand elle ne sera pas connue, il est toujours facile de la construire, absolument comme dans le cas du cylindre, et pour cette raison nous supposerons toujours dans nos épures que le cône est donné uniquement par sa trace et par son sommet. Si, par exemple, D (fig. 2) étant la directrice d'un cône dont le sommet est en s, nous nous occupons pour un instant de la génératrice qui passe par un point quelconque m de cette directrice, cette génératrice devant passer à la fois par le point m et par le point s, ses projections seront des lignes droites G^h et G^v, qui passeront respectivement par m^h et s^h, m^v

et s^v; et la trace n de cette génératrice G sera, comme pour le cylindre, un point de la trace horizontale de la surface.

61. *Reconnaître si un point donné appartient à un cône donné.* Ce que nous avons dit (59) pour le cylindre s'applique à la surface conique, avec cette seule différence que la génératrice du cône, au lieu d'être toujours parallèle à elle-même, se trouve en chaque point déterminée par la condition de passer par le sommet s; p sera un point du cône si, menant G^h par p^h et s^h, G^v par p^v et s^v, les points de rencontre respectifs m^h et m^v de ces droites avec les projections de la directrice D, se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, si la droite G de l'espace, menée par le point donné p et par le sommet s du cône, rencontre la directrice D de cette surface en un point quelconque m.

c. Représentation de la surface de révolution.

62. Le mode de représentation de la surface de révolution, en géométrie descriptive, sera encore un exemple de cette nécessité absolue d'avoir recours pour les surfaces à certaines circonstances de leur mode de génération, qui ne sauraient être exprimées sur l'épure même. Sans cette connaissance, sous-entendue sur le dessin, la représentation d'une surface de révolution serait impossible; avec cette donnée il n'est plus nécessaire de connaître que les deux éléments principaux qui suffisent à déterminer la surface, savoir, l'axe autour duquel la rotation a lieu, et la courbe qui tourne autour de cet axe, dans l'une quelconque de ses positions.

Sachant, par exemple, que A (fig. 3), dont les projections sont A^h et A^v, est l'axe autour duquel tourne la courbe directrice (C^h, C^v), la connaissance de la surface est parfaite; mais nous verrons que l'on peut toujours ramener cette position générale des éléments qui définissent une surface de révolution à la position particulière dans laquelle son axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la directrice étant d'ailleurs une courbe *méridienne*, c'est-à-dire une courbe plane dont le plan contient l'axe même de la surface. Si, pour plus de simplicité encore, ce plan méridien est parallèle à l'autre plan de projec-

tion, au plan vertical, par exemple, cette courbe plane se projettera verticalement en vraie grandeur comme en C^v (fig. 4), et sa projection horizontale sera une parallèle C^h à la ligne de terre. L'axe A étant perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale A^h se réduit à un point, et sa projection verticale est une perpendiculaire à la ligne de terre, en telle sorte que la figure 4, dans laquelle C^v est une ellipse, représente complétement l'ellipsoïde de révolution, sous cette seule condition de se rappeler le mode de génération de cette surface.

L'exposé de la méthode générale des changements de plan et surtout celle des mouvements de rotation, éclaircira ce que présentent nécessairement d'incomplet ces considérations préliminaires, auxquelles il faut en ce moment nous borner.

VIII. NOTATIONS.

63. Il aurait peut-être été plus méthodique d'aborder, dès le moment où nous parlions de projection, les notations particulières à l'aide desquelles une épure peut, pour ainsi dire, se lire comme on lirait un livre, et qui ajoutent considérablement à sa clarté. Ces notations, qui ont été introduites dans la science par M. Olivier, nous ont déjà servi dans les figures que nous avons étudiées, et nous avons pensé que l'habitude que les élèves auront dès l'abord contractée d'en faire usage rendra plus fructueuses les observations que nous avons encore à présenter sur ce sujet.

64. Un point m, considéré dans l'espace, sera toujours indiqué par nous par une lettre minuscule, et ses deux projections par m^h et m^v; ces indices ^{h} et ^{v} qui suivent la lettre m suffisent à nous rappeler qu'il ne s'agit pas du point m dans l'espace, mais de ses projections.

Si le point m est dans le plan horizontal, ou plus généralement dans celui des deux plans de projection que le plan de l'épure figure, il est alors sa propre projection sur ce plan, et il n'est plus nécessaire d'employer l'indice pour cette projection; alors la projection verticale est située sur la ligne de terre et se désigne

néanmoins par m^v, la position même de cette projection, et non l'indice rendant suffisamment compte de cette circonstance.

Si, au contraire, le point dont il s'agit est situé dans celui des deux plans qui est perpendiculaire au plan de l'épure et qui y est supposé rabattu, nous indiquerons cette circonstance pour un point n, par exemple, par la notation n^v; la projection correspondante n^h sera située sur la ligne de terre.

Les deux traces d'une droite offrent respectivement des exemples de ces deux positions particulières; si a et b sont ces deux traces, elles auront pour projections respectives a et a^v, b^v et b^h; a^v, b^h étant deux points situés sur la ligne de terre.

Si un point o est sur la ligne de terre, il est à la fois sa projection horizontale et sa projection verticale.

65. Une ligne courbe et plus particulièrement une droite quelconque sera désignée par une lettre majuscule, A par exemple, et ses deux projections seront A^h et A^v, c'est-à-dire qu'on appliquera aux deux projections de la droite A le même mode de notation qu'à un point; par suite de cette convention B et B^v seront les deux projections d'une droite située dans le plan horizontal, B^v se confondant avec la ligne de terre; C^h et C^v seront les deux projections d'une droite C contenue dans le plan vertical.

66. Le plan est représenté par ses traces : il faut donc que ces traces soient affectées de certains indices qui expriment leur valeur géométrique; c'est pour cela que les traces d'un plan P, par exemple, sont toujours indiquées par la même lettre majuscule de ce plan; et pour distinguer la trace horizontale de la trace verticale, on emploie encore les indices H et V, mais en caractères différents; et pour éloigner encore davantage de l'esprit toute confusion, on place dans ce cas l'indice avant la lettre qui particularise le plan que l'on considère; ainsi HP et VP seront pour nous les deux traces du plan P : n'oublions pas d'ailleurs que pour tout plan les deux traces viennent rencontrer la ligne de terre en un même point.

Ces conventions sont encore applicables aux éléments qui définissent les surfaces; l'usage apprendra suffisamment quelles sont les notations à employer dans ce cas.

67. Si la même projection ou la même trace appartient à la fois à différents points, à différentes lignes, ou à différents plans, cette projection ou cette trace sera affectée d'autant de lettres différentes qu'il sera nécessaire pour désigner cette circonstance.

En traitant des méthodes principales de la géométrie descriptive, nous aurons soin d'indiquer pour chaque représentation les modifications qu'il convient d'apporter à ces règles générales, faciles à suivre, et qui sont d'un immense secours pour la confection et la lecture des dessins un peu compliqués.

68. Une autre précaution est encore prise dans les épures pour aider à leur intelligence; si les deux plans indéfinis de projection qui divisent, ainsi que nous l'avons vu, l'espace en quatre parties étaient complétement opaques, l'œil placé dans l'angle antérieur supérieur, ne saurait apercevoir que ce qui est contenu dans cet angle, et, en ce qui concerne les plans de projection, il ne pourrait apercevoir du plan horizontal que ce qui est en avant de la ligne de terre, et du plan vertical rien autre chose que ce qui est au-dessus de cette ligne; les projections et les traces qui occupent ces positions sont indiquées sur le dessin en lignes pleines, tandis que, pour toutes celles représentées sur les autres parties des plans de projection, on emploie des lignes ponctuées, moins visibles, et formées d'une série de points juxtaposés.

69. En outre de ces lignes pleines ou ponctuées, presque exclusivement réservées aux données de la question ou aux résultats auxquels conduit la suite des opérations d'une épure, la géométrie descriptive emploie encore diverses sortes de lignes qui auront chacune leur valeur spéciale.

Les données, lorsqu'elles changent de position dans les opérations successives d'une solution graphique, sont successivement représentées après chacune de ces opérations par des lignes mixtes fortement accentuées, et composées d'une série de lignes et de points; le nombre des points intermédiaires, comme, par exemple, en — · · —, indique le nombre des opérations distinctes qu'il a fallu effectuer pour arriver à ce résultat. La méthode des changements de plan, comme celle des mouve-

ments de rotation, nous donnera continuellement des exemples de l'utilité de ces prescriptions; il y aura entre elles cependant cette différence que dans la première de ces deux méthodes les données ne changent jamais de position dans l'espace, mais seulement les lignes qui représentent ces données sur le dessin, par suite de la substitution de nouveaux plans de projection aux anciens.

Les lignes de construction qui servent à conduire à ces résultats successifs sont de même des lignes mixtes indiquant encore par le nombre des points le nombre des opérations effectuées; mais ces lignes sont, comme trait, parfaitement distinctes des premières et par l'épaisseur, et par la longueur des éléments rectilignes.

Quant aux lignes enfin qui, perpendiculaires à la ligne de terre, joignent les deux projections d'un même point, elles sont simplement indiquées par de petites lignes ponctuées beaucoup moins visibles et juxtaposées les unes à la suite des autres; telles sont, dans les différentes figures que nous avons passées en revue, les lignes qui joignent les deux projections d'un point quelconque, quelle que soit la position de ce point.

Ces notations, ainsi expliquées, nous serviront constamment dans le chapitre suivant, qui complétera ce qui nous reste à dire sur les questions de position relative des points, des droites et des plans; ces instructions générales recevront d'ailleurs au fur et à mesure de nos besoins, tous les compléments indispensables, particulièrement en ce qui concerne la notation et la représentation des surfaces courbes.

LIVRE II.

PROBLÈMES DE POSITION RELATIVE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

70. Les problèmes simples, que nous avons examinés à la fin du chapitre précédent, peuvent être considérés comme autant d'exemples de solutions qui s'obtiennent pour ainsi dire par la simple lecture. Il n'en est pas toujours de même ; mais le nombre de ceux qui peuvent ainsi se résoudre facilement est considérablement augmenté lorsque les données occupent, par rapport aux plans de projection, certaines positions particulières, qu'il est la plupart du temps très-facile de définir ; et s'ils ne se présentent pas habituellement dans ces conditions particulières, on peut cependant les résoudre encore avec facilité en amenant, par quelque moyen particulier, les données de la question dans ces positions spéciales par rapport aux plans de projection. Deux méthodes différentes conduisent à ce résultat : dans la première, on cherche à obtenir de nouveaux plans de projection sur lesquels les données de la question étant déterminées par leurs projections ou leurs traces, la solution cherchée puisse s'obtenir par de simples constructions sur le papier : c'est en cela que consiste la méthode des changements de plan dont nous aurons à faire de nombreuses applications.

CHAPITRE PREMIER.

MÉTHODE GÉNÉRALE DES CHANGEMENTS DE PLAN.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

71. Étant admis en principe que, pour servir à la fois de plans de projection, en géométrie descriptive, deux plans doivent être nécessairement perpendiculaires*, on conçoit que le plan de pro-

---

* Les projections qui nous occuperont dans tout le cours de cet ouvrage, et

jection H étant donné, on peut employer simultanément avec celui-ci comme plans de projection, une infinité de plans, V, V′, V″, tous perpendiculaires à H, mais différant entre eux de position, et si l'on suppose que les projections d'un point *m* par exemple soient données sur les plans H et V, considérés comme plans simultanés de projection, nous allons voir qu'il est très-facile de déterminer la projection de ce même point *m* sur un nouveau plan V′, faisant aussi avec le plan H un angle droit.

La facilité avec laquelle on passe ainsi d'un plan V à un nouveau plan V′, qui n'est lié de position, par rapport au premier, qu'en ce qu'ils doivent être tous deux perpendiculaires à un même plan H, pour qu'ils puissent être employés l'un et l'autre comme plans de projection, avec ce même plan H qui ne varie pas, fait que l'on opère toujours par des changements aussi simples; et nous verrons qu'en remplaçant successivement le plan V par un nouveau plan V′, puis le plan H par un nouveau plan H″ qui puisse le remplacer comme plan *simultané* de projection avec V′, et en continuant à substituer ainsi, par des opérations successives, un nouveau plan à l'un des plans de projection, on peut amener les différents problèmes à cette situation particulière pour les données, qui permette de trouver immédiatement la solution. On peut ainsi rapporter ces données à tels plans de projection que l'on voudra, placés d'une manière quelconque dans l'espace, pourvu qu'ils soient rectangulaires entre eux.

72. C'est ce que nous comprendrons facilement lorsque nous aurons appris à trouver sur un nouveau plan V′ perpendiculaire à H, la projection d'un point donné par ses deux projections sur deux plans primitifs H et V; et d'abord, comment indiquer sur une épure la position de ce nouveau plan?

---

qui s'obtiennent par des perpendiculaires au plan de projection que l'on considère, s'appellent *projections orthogonales* : elles porteraient encore ce nom si les deux plans de projection n'étaient pas perpendiculaires entre eux, mais nous n'aurons pas ici à les considérer; les *projections obliques* sont celles qui sont obtenues par des obliques au plan de projection, toutes parallèles entre elles; enfin, on fait encore un fréquent usage, particulièrement en perspective, des projections coniques pour lesquelles les lignes projetantes au lieu d'être parallèles entre elles passent toutes par un même point.

Nous avons déjà vu que lorsque deux plans H et V sont pris simultanément pour plans de projection, la feuille de papier sur laquelle on dessine à une certaine échelle est, par hypothèse, le plan H lui-même, et que l'on suppose le plan V couché sur le plan du papier, avec lequel il n'a réellement de commun que la ligne de terre LT. Ainsi, lorsque j'écris LT sur le papier, j'exprime à la fois que le plan V de projection qui est employé simultanément avec le plan H, représenté par la feuille de papier, coupe ce plan H suivant la ligne LT, et que ce plan V est couché sur le plan H en tournant autour de cette ligne, de manière que je puisse effectuer aussi sur la même feuille de papier toutes les constructions qui seraient réellement dans le plan V, considéré dans sa véritable position.

Ce que je viens de dire pour le plan V, je puis également le dire pour un autre plan V′ perpendiculaire à H; ce plan sera parfaitement déterminé pour moi lorsque je connaîtrai la ligne L′ T′ suivant laquelle il coupe le plan primitif H, et par le fait seul que j'aurai écrit L′T′ j'aurai exprimé cette circonstance, et j'aurai supposé que le plan V′ est venu se coucher sur le plan H en tournant autour de la nouvelle ligne de terre L′T′. La notation L′T′ ne sera jamais employée que pour indiquer cette circonstance.

73. Il importe ici de remarquer que si le plan H est horizontal, comme on le suppose habituellement, les plans V et V′ seront des plans verticaux, car tout plan perpendiculaire au plan horizontal est nécessairement un plan vertical. Si, au contraire, je veux remplacer le plan H par un autre plan H″, qui soit comme le premier perpendiculaire au plan V, que je suppose pour un instant vertical, H″ ne sera pas nécessairement horizontal, car un plan peut être perpendiculaire à un plan vertical et faire cependant un angle quelconque avec le plan horizontal, qui se trouve complétement déterminé de direction par ce fait seul qu'il est horizontal. Cette différence explique pourquoi, dans les opérations qui vont suivre, nous éviterons de parler de plans horizontaux et verticaux, et pourquoi nous avons préféré nous servir de cette seule expression de plans *simultanés* de projection, qui rend parfaitement compte de la position relative des deux plans, sans exprimer aucune hypothèse particulière sur la position de l'un ou de l'autre d'entre eux.

RÈGLES POUR EFFECTUER LES CHANGEMENTS DE PLANS.

74. Cela posé, nous résoudrons immédiatement cette question bien simple : étant données (Pl. VIII, fig. 1) les deux projections m^h et m^v d'un point m de l'espace, sur deux plans H et V, définis de position l'un par rapport à l'autre par la position de la ligne de terre LT, trouver la projection $m^{v'}$ de ce point sur un nouveau plan V′ qui, employé simultanément avec H, serait défini sur ce plan, considéré comme étant celui du papier, par une nouvelle ligne de terre L′T′.

m^h et m^v étant les projections d'un même point m sur les deux plans H et V, ces deux points doivent être sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; si cette condition n'était pas vérifiée, m^h et m^v ne sauraient être les projections d'un même point m de l'espace, sur ces deux plans. Le plan V′, par la ligne de terre L′T′, nous est aussi parfaitement connu que le plan V par la ligne de terre LT, et quoique nous ne connaissions pas encore $m^{v'}$, qui, grâce à la notation dont nous nous servons, indique déjà à notre esprit la projection du point m sur le nouveau plan V′, nous pouvons affirmer de la même manière que $m^{v'}$ doit se trouver sur la perpendiculaire abaissée de m^h sur L′T′, car H et V′ devant servir ensemble de plans de projection, si le point $m^{v'}$ se trouvait en dehors de cette perpendiculaire, il ne saurait être la projection du point m de l'espace qui se projette en m^h.

Ce point $m^{v'}$ nous serait donc parfaitement connu si nous avions sa distance à la ligne de terre, et cette distance nous pouvons la connaître immédiatement. N'oublions pas en effet que $m^v p$, est, ainsi que nous l'avons vu, une longueur égale à la distance du point m au plan H de projection employé simultanément avec le plan V. Quand nous remplaçons le plan V par le plan V′, ni le point m de l'espace, ni le plan H de projection n'ont changé, ni par conséquent la distance de ce point à ce plan, distance qui est égale à $m^v p$ et par conséquent aussi à $m^{v'} p'$, si la nouvelle projection $m^{v'}$ du point m sur le plan V′, simultané de H, nous était connue. Donc cette longueur nous servira à trouver $m^{v'}$ en prenant $m^{v'} p' = m^v p$; de là cette règle générale : pour trouver la projection $m^{v'}$ d'un point m sur un

nouveau plan V′ simultané de H, et défini sur le plan H par une ligne de terre L′T′, au moyen de ses deux projections m^h et m^v sur les plans H et V, abaissez de m^h une perpendiculaire $m^h p'$ sur L′T′ et mesurez sur cette perpendiculaire, à partir de cette nouvelle ligne de terre une distance $m^{v'}p' = m^v p$: le point $m^{v'}$ est la projection cherchée.

75. *Observation sur le sens dans lequel cette distance doit être portée.* Quelle que soit la position de la ligne de terre LT ou L′T′, si l'on veut bien se rappeler que l'on suppose toujours la partie supérieure du plan vertical rabattue sur la partie postérieure du plan horizontal, il est facile de se rendre compte que tout point qui, sur le plan V défini par LT, avait sa projection placée au delà de la ligne de terre LT, aura de même sa projection sur le plan V′ placée au delà de la ligne de terre L′T′, car, quel que soit le plan de projection V ou V′ que l'on considère, le point n'en est pas moins toujours situé au-dessus du plan H qui n'a pas changé de position.

De même si m^v (fig. 2) était au-dessous de la ligne de terre, ce qui indique que le point m est situé dans la partie inférieure de l'espace divisé par le plan H, $m^{v'}$ sera au-dessous de L′T′, en observant toujours que $m^v q = m^{v'} q'$.

Cette règle est générale et importante; la nouvelle projection du point se trouve placée par rapport à la nouvelle ligne de terre, comme l'était, par rapport à l'ancienne, sa projection sur le plan de projection auquel le nouveau plan est substitué.

Nous ferons des applications continuelles de cette règle que nous n'aurons plus qu'à rappeler; elle est applicable quelle que soit la position du nouveau plan de projection, qui n'est assujetti qu'à cette seule condition d'être perpendiculaire à celui des deux plans de projection qui est conservé. Dans notre exemple c'était le plan H, mais les mêmes raisonnements auraient pu être faits s'il s'était agi de conserver le plan V.

Il y a bien une différence entre eux, en ce que l'on a l'habitude de considérer le plan H comme représenté sur la feuille ou l'aire sur laquelle on dessine, et le plan V comme rabattu sur le premier; mais on peut aussi bien se figurer que le papier représente le plan V, et que le plan H s'y trouve rabattu en tournant autour de la ligne de terre LT. C'est même par ces fictions suc-

cessives que l'on peut effectuer successivement sur le même papier ou sur le même mur, d'abord les constructions relatives aux plans primitifs H et V, ensuite celles du plan V′ employé simultanément avec H, puis celles des plans H″ et V‴ qui remplacent successivement l'un le plan H et l'autre le plan V′.

Ces opérations successives constituent la pratique de la méthode des changements de plan. Nous allons voir comment on doit opérer pour trouver les nouvelles projections d'une droite et les nouvelles traces d'un plan sur le nouveau plan V′. Ces moyens sont les opérations fondamentales de la méthode qui nous occupe.

76. I. *Trouver la projection d'une droite* A *sur un plan* V′ *employé simultanément avec* H, *lorsque l'on connaît ses projections* A^h *et* A^v *sur les deux plans simultanés* H *et* V.

Cette opération fondamentale s'énonce ordinairement ainsi par abréviation, *changer de plan par rapport à une droite.* Sans attacher un sens purement grammatical à cette abréviation, nous l'emploierons fréquemment, parce qu'elle est consacrée par l'usage, et nous dirons simplement : *Changer de plan par rapport à un point, changer de plan par rapport à une droite, changer de plan par rapport à un plan.*

Le premier de ces problèmes nous l'avons implicitement résolu par les considérations qui précèdent, occupons-nous du second, et changeons de plan V, par rapport à la droite A.

Le nouveau plan V′ est comme précédemment défini sur le plan H que l'on conserve, et dont notre feuille de papier est la représentation, par la ligne de terre L′T′. A^h et A^v sont donnés, et il s'agit de déterminer $A^{v'}$ (fig. 3).

Cette projection est une ligne droite, car la ligne A dans l'espace est une ligne droite. Si donc nous pouvions déterminer deux de ses points, cette projection tout entière nous serait immédiatement connue, et le problème se trouve ainsi ramené à celui-ci : Trouver les nouvelles projections $m^{v'}$, $n^{v'}$ de deux points m et n pris arbitrairement sur la droite A.

m aura pour projections sur les plans primitifs m^h et m^v situés respectivement sur A^h et A^v, et ces deux points se trouvent sur une même perpendiculaire $m^h p m^v$ à la ligne de terre LT. D'après ce que nous venons de voir, pour obtenir $m^{v'}$, j'abaisse la per-

pendiculaire $m^h p'$ sur L'T', et je prends $p'm^{v'} = pm^v$ au-dessus de la ligne de terre L'T', parce que m^v est au-dessus de LT ; j'obtiens ainsi la nouvelle projection $m^{v'}$. Pour un autre point n j'opère de la même façon, $n^h q'$ est perpendiculaire à L'T' ; $n^{v'} q'$ au-dessus de L'T' est égal à $n^v q$ au-dessus de LT ; $n^{v'}$ est la projection cherchée du point n sur le plan V', défini par la ligne de terre L'T'.

Je joins $m^{v'}$ et $n^{v'}$ par une droite qui est la projection cherchée $A^{v'}$ de la droite donnée A.

Pour obtenir $A^{v'}$ avec la plus grande exactitude possible, il convient que les points $m^{v'}$ et $n^{v'}$ par lesquels cette droite doit passer, soient suffisamment éloignés l'un de l'autre, parce qu'en effet c'est alors qu'une erreur possible sur la détermination de l'un des deux points affectera le moins la position de la ligne. On se laissera donc guider par cette considération dans le choix des points arbitraires m et n, suivant la grandeur du papier ou de l'aire dont on dispose.

77. *Points remarquables.* Mais si le choix des points m et n est pour ainsi dire arbitraire, il en est quelques-uns que l'on peut prendre également et qui simplifient encore les constructions.

Le plus remarquable de ces points est la trace a de la droite A sur le plan H. En effet, la projection sur le plan V de ce point qui est dans le plan H, étant sur la ligne de terre, la distance qui correspondrait à la distance pm^v que nous avons considérée pour le point m, est nulle, et la nouvelle projection $a^{v'}$ est aussi sur la ligne de terre L'T' ; il suffit donc d'abaisser la perpendiculaire $aa^{v'}$ sur L'T' pour avoir en $a^{v'}$ la projection cherchée. C'est ce que l'on pouvait dire à priori, car le point a étant dans le plan H, ne peut avoir sa projection sur tout autre plan, employé simultanément, que sur la ligne qui est l'intersection des deux plans, ou, ce qui est la même chose, sur la ligne de terre.

Un autre point remarquable est celui qui a pour projection b^h, point de rencontre de L'T' avec A^h ; le point b^h étant sur la nouvelle ligne de terre est lui-même le pied de la perpendiculaire qu'il faut abaisser de la projection b^h sur L'T' ; et $b^h b^{v'}$ étant cette perpendiculaire, la distance $b^h b^{v'}$ doit être égale comme

précédemment à rb^v, et on obtient le point $b^{v'}$ en portant immédiatement cette distance à partir de b^h.

78. *Cas où la projection* A^h *est parallèle à* L'T'. De ce que A^h (fig. 4) est parallèle à L'T', on peut conclure que la droite A dans l'espace est parallèle au plan V'; ou, en d'autres termes, que le plan projetant de la droite A sur le plan H est lui-même parallèle à V'.

La nouvelle projection $A^{v'}$ de la droite s'obtient comme précédemment au moyen de deux de ses points, ainsi qu'on peut le voir sur la figure 4 dans laquelle on s'est servi des deux traces *a* et *b* de la droite A.

79. *Cas où la projection* A^h *se confond avec* L'T'. La projection A^h (fig. 5) de la droite est sur le plan H, c'est la trace du plan projetant sur ce plan H; L'T' c'est la trace du plan V' avec ce même plan H, auquel il est perpendiculaire comme le plan projetant lui-même. Ces deux plans se confondent donc, et la droite A est dans le plan V'. La construction est la même que la précédente, mais ce n'est plus une simple projection que l'on obtient en $A^{v'}$, c'est la droite A elle-même couchée sur le papier avec le plan V' qui a tourné autour de L'T'. Pour indiquer cette circonstance, nous écrivons $\underline{A}^{v'}$, notation particulière qui nous avertit que la droite A elle-même est dans le plan V'. Cette position particulière du plan V' nous sera fort utile dans bien des circonstances, car c'est en choisissant convenablement, comme nous l'avons déjà dit, les nouveaux plans de projection que la méthode des changements de plans parvient à simplifier les questions complexes. Voici encore un exemple analogue :

80. *Cas dans lequel* L'T' *est perpendiculaire à* A^h. Puisque A^h, planche IX, figure 1, est perpendiculaire à L'T', tout point m^h de A^h aura pour projection sur le plan V' un des points de A^h prolongé, car la perpendiculaire à la ligne de terre L'T' qui relie m^h à $m^{v'}$, se confond avec A^h. Par suite $A^{v'}$ n'est autre chose que le prolongement de A^h, et se trouve immédiatement connu. Si l'on veut avoir en particulier la projection $m^{v'}$ du point *m*, il suffira de prendre $m^{v'}p' = m^v p$.

Dans cette position, la droite A de l'espace est perpendicu-

laire à la nouvelle ligne de terre L'T', par cette seule raison que ses deux projections sont perpendiculaires sur l'épure à cette même ligne L'T'.

81. II. *Prendre un nouveau plan de projection parallèle à une ligne* A *donnée par ses projections.*

Pour qu'une droite A soit parallèle à l'un des plans de projection, il faut et il suffit que l'une de ses projections soit parallèle à la ligne de terre; si donc on veut que le nouveau plan V' à substituer au plan V soit parallèle à la droite A, ou, ce qui revient au même, que la droite A, sans changer de position, se trouve parallèle au nouveau plan V', il faut et il suffit que sa projection A^h soit parallèle à la nouvelle ligne de terre. Menons la ligne L'T' parallèle à A^h : nous considérerons cette droite comme définissant le nouveau plan V' sur le plan H, et nous obtiendrons immédiatement $A^{v'}$ (fig. 2) à l'aide des deux traces a et b^v sur les deux plans primitifs de projection.

82. *Cas particulier.* La condition énoncée serait tout aussi bien satisfaite si la distance $a\ a^{v'}$, devenant nulle, L'T' se confondait avec A^h. Alors le plan V' n'est autre chose que le plan projetant de la droite A sur le plan H, cette droite étant contenue dans le nouveau plan de projection; $A^{v'}$ dans sa véritable position, c'est la droite A dans l'espace, et cette circonstance s'exprime, ainsi que nous l'avons vu déjà, en soulignant la notation $\underline{A^{v'}}$.

Cette position particulière du nouveau plan de projection nous servira souvent à obtenir des simplifications remarquables dans nos épures.

83. III. *Une droite* A *parallèle à l'un des plans de projection étant donnée, prendre un nouveau plan de projection qui soit perpendiculaire à cette droite.*

La droite A (fig. 3) est parallèle au plan primitif de projection V, parce que sa projection horizontale A^h est parallèle à LT, et il faut remplacer l'un des deux plans primitifs de projection par un autre plan qui soit perpendiculaire à la droite A.

La question ainsi posée, on se demande tout d'abord auquel des deux plans primitifs de projection il faudra substituer le

nouveau plan, pour que la condition énoncée soit satisfaite, et il est facile de voir que dans le cas actuel ce sera le plan H : un nouveau plan V′ perpendiculaire à H ne saurait être perpendiculaire à A, puisque cette droite n'est pas parallèle à H, mais cette condition peut, au contraire, être satisfaite par un nouveau plan H′ perpendiculaire à V, et qui serait défini sur ce plan par une ligne de terre L′T′ perpendiculaire à A^v. A^v en effet, dans le cas particulier qui nous occupe, est parallèle à la droite A dans l'espace, et il suffit dès lors de démontrer que A^v est perpendiculaire à H′, ce qui est évident, puisque cette droite est dans le plan V perpendiculaire à H′ et qu'elle est perpendiculaire à une droite L′T′ de ce plan.

Reste à trouver la nouvelle projection $A^{h'}$ de la droite A. Or, A étant perpendiculaire à H′, sa projection sur ce plan se réduit à un point $A^{h'}$, qui doit se trouver dans le prolongement de la droite A^v, et pour connaître la distance de ce point à L′T′, il suffira de considérer un point quelconque m de la droite A. Le point m a pour projections sur les plans primitifs H et V, m^h et m^v; or $m^h p$ est la distance du point m au plan V; cette distance ne change pas, et elle est aussi représentée par $m^{h'}p'$; prenant donc $p'm^{h'} = pm^h$, nous obtenons $m^{h'}$, et c'est en ce seul point que se trouve placée toute la projection $A^{h'}$ de la droite A sur le nouveau plan H′ de projection; en d'autres termes, $m^{h'}p'$ est égal à la distance de A^h à LT.

Cas particulier. Si la droite A était dans le plan V, auquel cas on écrirait A^o au lieu de A^v, $m^{h'}$ et p' se confondraient, et la projection $A^{h'}$ serait un point de la nouvelle ligne de terre L′T′.

84. IV. *Une ligne droite* A, *située d'une manière quelconque dans l'espace, étant donnée, obtenir un système de plans de projection tel que l'un d'eux soit perpendiculaire à cette droite.*

La figure 4 fera comprendre comment le plan V ayant été d'abord remplacé par un plan V′ parallèle à la droite A donnée par ses projections, le plan H a pu être ensuite remplacé par un plan H″ qui, employé simultanément avec le plan V′, est cependant perpendiculaire à la droite donnée A.

Cette figure n'est en quelque sorte que la superposition des deux figures précédentes, et il est essentiel de se familiariser avec cette succession d'opérations.

LT est la ligne de terre, intersection commune des deux plans primitifs H et V; A^h et A^v sont les deux projections de la droite A sur ces deux plans employés simultanément comme plans de projection.

L′ T′ est une seconde ligne de terre qui définit sur le plan de l'épure, considérée comme étant située dans le plan H, la position du nouveau plan V′ de projection; H et V′ sont alors employés simultanément; A^h et $A^{v'}$ sont les deux projections de la droite A.

L″ T″ est une troisième ligne de terre, qui définit sur le plan de l'épure, considérée à ce moment comme étant située dans le plan V′, la position du nouveau plan H″ de projection; V′ et H″ sont alors employés simultanément; $A^{v'}$ et $A^{h''}$ sont les deux projections de la droite A; $A^{h''}$ se réduit à un point, parce que cette droite est perpendiculaire au plan de projection que l'on considère.

Quelle que soit donc la position d'une droite A dans l'espace, on peut toujours, au moyen de deux changements de plan, obtenir ses projections sur deux plans simultanés de projection, dont l'un soit perpendiculaire à la droite donnée.

Il faut acquérir l'habitude de reconnaître avec facilité ces opérations successives dans une épure, et s'exercer à voir d'un coup d'œil, en l'absence des figures 2 et 3, par exemple, celles qui ont été effectuées sur la figure 4. Si LT de la figure 3 venait à être appliqué exactement sur L′ T′ de la figure 4, A^v viendrait en $A^{v'}$, A^h en $A^{h''}$; cette difficulté est tout à fait de la même nature que celle qui consiste à lire dans un livre placé de travers.

85. V. *Changer de plan par rapport à un plan.*

Changer de plan par rapport à un plan P, c'est, d'après la définition que nous avons donnée de cette expression, trouver la trace de ce plan P sur un nouveau plan de projection H′ ou V′ employé simultanément avec l'un des plans de projection primitifs V ou H; nous supposerons qu'il s'agit de remplacer le plan V par un nouveau plan V′ perpendiculaire à H, et défini sur ce plan H par une nouvelle ligne de terre L′T′ (Pl. X, fig. 1). La trace HP, suivant laquelle le plan donné rencontre le plan H,

est toujours une des lignes qui servent à définir la position de ce plan, et il faut seulement trouver V'P.

Le plan étant d'abord déterminé par ses deux traces, nous pouvons connaître autant de points que nous voudrons de ce plan, par exemple, m et n. Pour avoir la projection m^v du point m, auquel appartient la projection m^h choisie arbitrairement, nous menons A^h parallèle à HP, nous élevons la perpendiculaire $a^h a^o$ sur la ligne de terre, au point a^h, et en menant $a^o m^v$ parallèlement à la ligne de terre, nous savons que m^v est la projection cherchée; de même pour n^v.

Connaissant m et n par leurs projections respectives sur les plans H et V, nous savons déterminer leurs projections $m^{v'}$ et $n^{v'}$ sur le nouveau plan V', et le problème se réduit dès lors à celui-ci : Étant donnée la trace HP d'un plan P, et les projections de deux points contenus dans ce plan, trouver son autre trace.

Pour fixer les idées et rendre le langage plus précis, imaginons un instant que H soit un plan horizontal, et V' un plan vertical, nous n'aurons pour résoudre ce problème qu'à considérer les horizontales A et B du plan P, qui passent respectivement par les points m et n. Ces horizontales auront pour projections horizontales les parallèles A^h et B^h à la trace HP, et pour projections verticales les parallèles $A^{v'}$ et $B^{v'}$ à la ligne de terre L'T'. Nous déterminerons les traces verticales c^0 et d^0 de ces deux droites, et nous aurons ainsi deux points de la trace verticale cherchée; la trace elle-même sera la ligne V'P qui devra comme vérification venir rencontrer la ligne de terre L'T' au même point o que la trace horizontale HP.

Il est presque inutile d'ajouter maintenant que ces raisonnements sont parfaitement applicables pour le cas où les deux plans H et V', sans cesser d'être perpendiculaires entre eux, n'occuperaient pas la position que nous venons d'admettre, et que par des considérations absolument semblables on aurait pu parvenir à trouver la trace du plan P sur un nouveau plan de projection remplaçant le plan H, et qui serait par conséquent perpendiculaire au plan conservé V.

86. Observation. Deux points m et n nous ont été nécessaires dans cette solution. Si la trace conservée rencontre la nouvelle

ligne de terre dans les limites du dessin, on pourra se borner à la considération d'un seul de ces points pour déterminer la trace cherchée.

Mais quelque commode que soit ce moyen, qui diminue notablement le nombre des opérations à effectuer, il faut souvent préférer la méthode générale, qui fait obtenir deux points aussi éloignés l'un de l'autre que le permet la grandeur de l'épure, et qui par conséquent conduit à la détermination de la trace cherchée avec une certitude plus grande.

87. Cas où L'T' est perpendiculaire à la trace du plan.

Si la nouvelle ligne de terre est perpendiculaire à la trace que l'on conserve, on peut affirmer que le nouveau plan de projection est perpendiculaire au plan donné P, auquel cas nous savons que tout ce qui est contenu dans ce plan P se projette suivant sa trace. Les projections $m^{v'}$ et $n^{v'}$ des deux points employés à la construction que nous venons d'exposer sont donc elles-mêmes sur la trace cherchée, qui se trouve alors déterminée (fig. 2) sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à $A^{v'}$.

Cette circonstance se présentera à nous très-fréquemment.

88. Cas où L'T' est parallèle à la trace du plan.

Lorsqu'un plan a une de ses traces parallèle à la ligne de terre, il est lui-même parallèle à cette ligne, et son autre trace lui est également parallèle. Ici le point o est à l'infini, et la considération de deux points m et n du plan P est absolument indispensable. Après avoir cherché leurs nouvelles projections $m^{v'}$ et $n^{v'}$, on joindra ces deux points par une droite M, qui se projette en M^h et M^v dans le système des deux plans simultanés de projection H et V, en M^h et $M^{v'}$ dans le système des deux plans H et V'; la trace $a^{v'}$ de cette droite est un des points de la trace du plan, et cette dernière trace V'P s'obtient en menant par $a^{v'}$ une parallèle à L'T' (fig. 3).

L'habileté consiste, dans toutes ces solutions, à choisir le plus convenablement possible ces points qui servent à la construction; ils seront toujours d'autant mieux choisis qu'ils seront plus éloignés les uns des autres.

89. VI. *Prendre un nouveau plan de projection perpendiculaire à un plan* P, *donné par ses traces.*

Encore bien, qu'en général, la condition de perpendicularité de deux plans ne puisse s'exprimer graphiquement d'une manière simple, il est très-facile, dans ce cas, de fixer la direction de la nouvelle ligne de terre, et l'on peut à volonté remplacer le plan H ou le plan V par un nouveau plan de projection qui satisfasse à la condition énoncée. S'il s'agit, en effet, de substituer au plan V un nouveau plan de projection V′ employé simultanément avec le plan H, le plan H et le plan donné P étant à la fois perpendiculaires au plan V′, celui-ci, à son tour, sera perpendiculaire à leur commune intersection HP, et, par conséquent, toute droite tracée dans ce plan V′ sera elle-même perpendiculaire à la trace HP; donc enfin L′T′ qui est à la fois dans le plan H et dans le plan V′ est perpendiculaire à la ligne HP située dans le plan de l'épure.

On pourrait de même remplacer le plan H par un nouveau plan H′ perpendiculaire à P, en prenant une ligne de terre λθ Pl. XI, fig. 1), perpendiculaire à VP.

Reste à déterminer la trace V′P du plan P sur le plan V′; les considérations que nous avons présentées (84) sont ici parfaitement applicables; après avoir choisi un point m du plan P, on en cherchera la projection $m^{v'}$, et $m^{v'}$ sera un des points de la nouvelle trace du plan.

90. VII. *Un plan* P *perpendiculaire à l'un des plans de projection étant donné, prendre un nouveau plan de projection qui soit parallèle à ce plan* P.

Si le plan P (fig. 2) est perpendiculaire au plan de projection V, sa trace HP est perpendiculaire à la ligne de terre LT, et l'on veut substituer au plan H un nouveau plan H′ qui soit à la fois perpendiculaire au plan V et parallèle au plan P. De ce parallélisme il résulte que le plan H′, quelle que soit sa position, rencontrera le plan V suivant une parallèle à VP; prenant donc L′T′ dans cette direction, on serait tenté de chercher ensuite quelle est la trace du plan P sur le nouveau plan H′ défini sur le premier plan V par cette ligne de terre L′T′; mais pour peu que l'on y réfléchisse, on verra que cette trace n'existe pas; le plan P étant, par construction, parallèle au nouveau plan de projection, ce plan P doit se trouver alors représenté par sa trace unique VP.

91. VIII. *Un plan* P *situé d'une manière quelconque dans l'espace étant donné, obtenir un système de plans de projection, tel que l'un des deux soit parallèle au plan donné.*

La figure 3 fera comprendre comment le plan V, ayant été d'abord remplacé par un plan V′ perpendiculaire au plan P donné par ses traces, le plan H a pu être ensuite remplacé par un plan H″, qui employé simultanément avec le plan V′, est cependant parallèle au plan donné P.

Cette figure n'est, en quelque sorte, que la superposition des deux figures précédentes, et il est essentiel de se familiariser avec cette succession d'opérations.

LT est la ligne de terre, intersection commune des deux plans primitifs H et V; HP et VP sont les deux traces du plan P sur ces deux plans employés simultanément comme plans de projection.

L′T′ est une seconde ligne de terre qui définit sur le plan de l'épure, considérée comme étant située dans le plan H, la position du nouveau plan V′; H et V′ sont alors employés comme plans simultanés de projection; HP et V′P sont les deux traces du plan P.

L″T″ est une troisième ligne de terre qui définit sur le plan de l'épure, considérée à ce moment comme étant située dans le plan V′, la position du nouveau plan H″ de projection; V′ et H″ sont alors employés simultanément; V′P reste l'une des traces du plan P; son autre trace disparaît parce que le plan P, étant parallèle au nouveau plan H″, ne saurait avoir de trace sur ce plan.

Quelle que soit la position d'un plan P dans l'espace, on peut toujours, au moyen de deux changements de plan, obtenir cette situation particulière des plans de projection dans laquelle l'un d'eux est parallèle au plan donné.

Nous avons déjà vu (**84**) qu'une double opération était également nécessaire pour obtenir un plan de projection perpendiculaire à une droite donnée.

Remarques générales sur l'usage des changements de plan.

92. De ce qui précède, il résulte qu'un système d'éléments géométriques exclusivement composé de points, de droites et de

plans étant donné, nous pourrons substituer aux anciens plans de projection des plans nouveaux qui occuperont, par rapport à certaines données, des positions de parallélisme ou de perpendicularité.

Un seul changement de plan suffit pour que l'un des nouveaux plans de projection soit parallèle à une droite donnée ou perpendiculaire à un plan donné.

Deux changements de plan sont successivement nécessaires pour que l'un des nouveaux plans soit perpendiculaire à une droite ou parallèle à un plan du système.

Et si l'on réfléchit à ce que, dans ces positions particulières, la solution de certains problèmes peut, pour ainsi dire, se lire immédiatement sur le dessin, on comprendra tout le parti qu'il est possible de tirer, en géométrie descriptive, de ces transformations dont on ne saurait donner une idée plus exacte qu'en les comparant à la transformation des coordonnées dans l'application de l'algèbre à la géométrie.

S'agit-il, par exemple, d'une distance à mesurer sur une droite, en obtenant un plan de projection qui lui soit parallèle, cette distance se projettera en vraie grandeur sur ce plan, et le problème sera immédiatement résolu.

S'agit-il d'une perpendiculaire à abaisser d'un point sur une droite, ne voit-on pas immédiatement que, si l'on considère un plan de projection parallèle à celui qui est déterminé par le point et par la droite, la perpendiculaire se projettera également en vraie grandeur sur ce plan? La même identité sera encore réalisée pour une perpendiculaire à un plan, si le plan de projection est perpendiculaire au plan donné.

S'agit-il encore de mesurer l'angle de deux droites, cet angle ne sera-t-il pas donné en vraie grandeur par celui des projections des droites qui le comprennent, si le plan de projection est parallèle au plan des deux droites? Il en sera de même pour l'angle de deux plans, si le plan de projection que l'on considère est perpendiculaire à leur commune intersection.

Ramener à ces cas particuliers et remarquables les problèmes de la géométrie descriptive, de manière à en obtenir ensuite la solution immédiate, tel est le but de la méthode des changements de plan, qui est surtout précieuse en ce que, par le choix raisonné que l'on apprend à faire des nouveaux plans de projec-

tion, on peut toujours renfermer toutes les constructions dans les limites du dessin, ce qui souvent ne peut être obtenu par les modes de solution ordinairement employés.

Rien ne saurait, au reste, mieux que cette méthode, forcer à se représenter les données géométriques dans l'espace, et par conséquent habituer l'esprit à ne pas séparer la réalité en relief, du dessin qui la définit sur les plans de projection.

93. Nous remarquerons que, pour arriver au but que nous venons d'indiquer, il nous faudra souvent effectuer plusieurs changements de plan successifs, mais toujours il est nécessaire de changer alternativement les plans de nom contraire; ainsi H et V étant les plans primitifs, on emploiera successivement H et V′, si c'est le plan V que l'on remplace d'abord, puis V′ et H″, puis enfin H″ et V‴; c'est à ce troisième changement de plan que se borneront d'ailleurs les opérations que nous aurons à effectuer; si, au contraire, la première opération consistait à remplacer H par H′, les différents systèmes de plans de projection seraient successivement H et V, H′ et V, H′ et V″, H‴ et V″.

94. Les lignes de construction relatives à ces différentes opérations seront indiquées sur les dessins d'une manière particulière : celles qui se rapporteront à la première opération seront toujours représentées, comme il a été dit en parlant de la notation en général, par des lignes mixtes dans lesquelles chaque trait sera séparé du suivant par un point; deux et trois points placés dans les mêmes circonstances avertiront qu'il s'agit de lignes de construction ayant rapport au deuxième et au troisième changement de plan. Cette même disposition en traits plus longs et plus gros indiquera ce que deviennent les données après chaque opération effectuée.

Lorsqu'on indique par m^h, par exemple, l'une des projections d'un point m, la lettre m de cette notation rappelle qu'il s'agit du point m de l'espace, et l'indice ^{h} que c'est sa projection sur le plan H que l'on considère. Quand ce plan a été remplacé par le plan H′, il faut donc que ce dernier indice soit aussi changé dans la notation, et nous écrirons dans ce cas $m^{h'}$; de même $m^{v''}$, $A^{v'}$, $A^{h'''}$, H″P, V‴Q sont des notations qui suffisent à rappeler à l'esprit que l'on a opéré un ou plusieurs changements de plan

par rapport au point *m*, par rapport aux droites A et B, ou par rapport aux plans P et Q.

La pratique de cette méthode et de ces notations éclaircira d'ailleurs, dans les exemples suivants, ce que ces explications pourraient présenter d'incomplet.

La plus grande difficulté que rencontre cette pratique consiste dans l'habitude qu'il faut prendre de se bien représenter la position des deux plans de projection, dont l'un, que l'on suppose rabattu sur le plan du dessin, est défini par rapport à l'autre, qui est ce plan lui-même, par des lignes de terre différemment inclinées; pour se familiariser avec cet ordre d'idées, les élèves feront bien de disséquer pour ainsi dire leurs épures, en n'effectuant sur chacune d'elles qu'une seule opération de changement de plan, et en prenant pour données d'un second problème auquel ils consacreront un nouveau dessin, les résultats obtenus par cette première opération.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES DE POSITION RELATIVE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN, PAR LA MÉTHODE DES CHANGEMENTS DE PLAN.

PROBLÈME. I. *Trouver la distance entre deux points* m *et* n.

95. SOLUTION. Si la droite *mn* qui joint les deux points était parallèle à l'un des plans de projection, au plan V, par exemple, la partie de cette droite comprise entre ces deux points se projetterait en vraie grandeur sur ce plan V. Dans ce cas particulier la ligne à mesurer dans l'espace pourrait donc se mesurer sur ce plan V, et si l'on pouvait ramener le cas général dans lequel les points *m* et *n* sont situés d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection, à ce cas particulier dans lequel la solution se présente d'elle-même, le problème se trouverait immédiatement résolu.

Rien n'est plus facile, au moyen d'un changement de plan de projection, que de transformer ainsi le problème, sans faire varier la position des points *m* et *n* dans l'espace.

Si l'on remarque, en effet, que pour qu'une droite A soit parallèle à un plan de projection V', employé simultanément avec le plan H, il faut et il suffit que la projection A^h de cette droite soit parallèle à la ligne de terre L'T' qui définit le plan V' sur le plan H, on voit immédiatement qu'il suffit de choisir pour nouvelle ligne de terre L'T' une parallèle quelconque à A^h, et de chercher les nouvelles projections $m^{v'}$, $n^{v'}$, $A^{v'}$, des points donnés *m* et *n*, et de la droite A qui les joint, sur le nouveau plan V' défini par cette ligne de terre.

On observera que ce plan V', ainsi défini, est parallèle au plan projetant de la droite A sur le plan H; les plans de projection simultanément employés sont alors H et V'.

La solution de ce premier problème peut, dès lors, se formuler ainsi :

Prendre pour nouveau plan de projection V′ simultané à H, un plan perpendiculaire au plan H, et le rencontrant suivant une ligne L′T′ parallèle à la projection A^h de la droite A qui joint les points donnés *m* et *n*.

Chercher sur ce nouveau plan V′ les projections des points et de la droite A qui les joint.

Mesurer la longueur $m^{v\prime}n^{v\prime}$ sur ce plan de projection V′; ce sera la longueur cherchée. (Voy. planche XVI, figure 1.)

96. Épure. Le point *m* est donné par ses projections m^h et m^v, sur les plans de projection simultanés H et V, perpendiculaires l'un à l'autre, et définis sur le plan du papier par la ligne de terre LT qui est leur intersection; le point *n* est donné de la même manière par ses projections n^h et n^v.

La droite A, qui joint dans l'espace les points *m* et *n*, a pour projection sur H, la droite A^h qui joint les projections m^h et n^h, des points *m* et *n* sur le même plan. La projection A^v de cette même droite sur V est déterminée de la même manière sur ce plan.

Je prends pour nouveau plan de projection simultané avec H un plan V′ dont l'intersection avec H est L′T′, parallèle à A^h. Quelles sont les projections des deux points sur ce plan?

La projection $m^{v\prime}$ du point *m* sur ce plan V′ doit se trouver sur la perpendiculaire m^hp' abaissée sur la ligne de terre L′T′ du point m^h, projection de ce même point *m* sur le plan H, employé simultanément avec V′. La hauteur du point *m* au-dessus du plan H est donnée en vraie grandeur par la distance m^vp de la projection verticale m^v à la ligne de terre LT qui définit dans le même plan H, le premier plan de projection V, employé simultanément avec lui; $m^{v\prime}p'$ doit lui être égale, et le point $m^{v\prime}$ se trouve ainsi déterminé. On trouverait de même $n^{v\prime}$, en prenant $n^{v\prime}q' = n^vq$. Les projections $m^{v\prime}$ et $n^{v\prime}$ étant ainsi connues, la droite A se trouve projetée sur V′, suivant $A^{v\prime}$, et la longueur de $m^{v\prime}$ à $n^{v\prime}$ est la distance D cherchée; il suffira de la mesurer en mètres sur le papier pour pouvoir l'estimer en chiffres.

Si l'échelle du dessin étant au $\frac{1}{10}$, cette distance est de $0^m,35$, on peut affirmer que la distance des points *m* et *n* dans l'espace est de $3^m,50$.

97. Simplification. Épure. (Fig. 2.) Pour permettre à nos lecteurs d'acquérir une habitude suffisante des méthodes de la géométrie descriptive, et surtout pour les forcer à lire dans l'espace, nous prendrons pour plans auxiliaires, dans nos épures, ceux qui satisfont à la seule condition de position, nécessaire pour la suite des raisonnements; mais il arrivera presque toujours qu'en adoptant quelque position moins générale, le tracé pourra être considérablement simplifié, en voici un exemple :

La ligne de terre L'T' n'étant subordonnée à aucune autre condition que d'être parallèle à A^h, nous pouvons prendre pour nouvelle ligne de terre la projection A^h elle-même, ainsi que nous l'écrivons sur l'épure 2, ce qui revient à dire que le plan V' se confond avec le plan projetant de la droite A sur le plan H; m^h et n^h sont alors sur la ligne de terre, et il suffit, après avoir mené comme précédemment les perpendiculaires $m^h m^{v'}$, $n^h n^{v'}$, à la nouvelle ligne L'T', de prendre $m^h m^{v'} = pm^v$, $n^h n^{v'} = qn^v$, et la distance $m^{v'} n^{v'}$ se trouve encore être la distance cherchée.

On voit combien cette position particulière, choisie pour le plan V', a simplifié les constructions.

Le même résultat serait également obtenu en conservant le plan V et en employant simultanément avec lui le plan H'' qui projette la droite A sur le plan V. Le raisonnement serait absolument le même, pourvu que l'on remplaçât partout le symbole V par le symbole H, et v par h.

Problème II. *Trouver la distance d'un point* m *à un plan* P.

98. Solution. Cette distance est mesurée par la longueur mn d'une perpendiculaire abaissée du point m sur le plan P, et venant percer ce plan en un point n.

Quel est le cas particulier dans lequel cette longueur mn se projetterait en vraie grandeur, et serait immédiatement connue? A cette question qu'il faut toujours s'adresser lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de l'espace par la méthode des changements de plan, la réponse se présente d'elle-même. Si, en effet, le plan dont il s'agit était perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan V, par exemple, ne sait-on pas que la normale au plan donné sera nécessairement parallèle au plan

de projection V, et qu'en conséquence elle s'y projettera en vraie grandeur? Ne sait-on pas aussi que la projection de la normale sur ce plan sera perpendiculaire à la trace du plan donné; qu'ainsi la projection de la normale est connue ainsi que le point où elle rencontre le plan? On possède donc tout ce qu'il faut pour avoir, à l'aide d'un simple mesurage, la distance cherchée.

Ramener le cas général à ce cas particulier sans faire varier le plan donné dans l'espace, mais seulement les plans de projection, voilà donc tout ce qu'il faut faire pour atteindre le but que nous nous proposons ici.

Soient H et V les plans de projection par rapport auxquels nous sont données les projections m^h et m^v du point, les traces HP et VP du plan, on pourra toujours trouver un plan V', qui, employé comme plan de projection simultanément avec le plan H, remplira la condition que l'on désire; car tout plan perpendiculaire à H, et défini sur ce plan par une ligne de terre L'T', perpendiculaire à la trace HP du plan donné sur le plan H, se trouvera en même temps perpendiculaire au plan donné dans l'espace.

Dès lors nous pouvons ainsi formuler la solution :

Remplacer le plan V de projection par un nouveau plan V' défini sur le plan H par une ligne de terre perpendiculaire à HP.

Représenter sur ce plan V' le point et le plan donnés. La projection de la normale qui mesure la distance cherchée s'obtiendra en abaissant du point $m^{v'}$ une perpendiculaire $m^{v'}n^{v'}$ à la trace V'P du plan donné sur le nouveau plan V'. (Voy. pl. XVIII, fig. 1.)

99. Épure. m^h et m^v sont les projections du point m, HP et VP les traces du plan P sur les plans de projection H et V, c'est-à-dire les intersections de ces plans avec le plan P de l'espace dans sa véritable position, qui ne doit pas changer.

Nous prenons un nouveau plan V' défini sur le plan H par une perpendiculaire quelconque L'T' à HP, il faut trouver sur ce plan V' la projection $m^{v'}$ du point m et la trace V'P du plan P.

Quant à $m^{v'}$, il doit se trouver sur la perpendiculaire m^hp' abaissée de m^h sur la ligne de terre L'T', et à une distance $m^{v'}p'$

de cette ligne de terre égale à $m^v p$. Quant à la représentation du plan P, dont les traces sur les plans H et V employés simultanément étaient HP et VP, la trace HP ne change pas lorsqu'il s'agit des plans simultanés H et V', et par conséquent le point o où la trace HP rencontre la nouvelle ligne de terre L'T', est déjà un point de la trace V'P que nous cherchons. Pour obtenir un autre point de cette trace, il faudra considérer une ligne contenue dans ce plan, et qui soit parallèle au plan H commun aux deux systèmes H, V et H, V'. Cette droite, que nous appellerons A, étant parallèle au plan H, sa projection sur ce plan sera une parallèle A^h à HP; le point a^o dans lequel cette droite vient percer le plan V, s'obtiendra en menant la perpendiculaire $a^o a^h$ à la ligne LT par le point a^h, où sa projection sur le plan H coupe la ligne de terre; a^o, ou l'intersection de cette droite A contenue dans le plan P avec le plan V de projection primitif, se trouvera sur VP, et la parallèle $a^o b^v$ à la ligne de terre LT, sera la projection sur V de cette même droite A. Tout point de cette droite est dans le plan P, et en particulier le point b^h, b^v, dont la projection horizontale b^h se confond avec m^h; c'est le point sur lequel nous opérerons, afin de profiter des lignes qui nous ont déjà servi dans les constructions précédentes; si nous avions sa projection sur le plan V', nous posséderions un second point de la trace que nous cherchons. Opérons donc sur le point b, donné par ses projections b^h et b^v, comme nous avons opéré sur le point m; prolongeons donc la droite A^h, qui, par construction, est perpendiculaire à L'T', et prenons une longueur $b^{v\prime} p' = b^v p$, en ayant soin d'indiquer le point ainsi obtenu par $b^{v\prime}$. La trace du plan P sur le plan V' ou V'P sera dès lors donnée par la droite $o b^{v\prime}$ passant par le point o et le point $b^{v\prime}$.

Le plan P est alors déterminé par ses deux traces HP, V'P; de ce que L'T' est perpendiculaire à HP, on conclut que ce plan est perpendiculaire au nouveau plan V' de projection; tout ce que ce plan contient se projette sur V', suivant sa trace verticale V'P, et de cette position particulière il résulte, ainsi que nous l'avons dit, que, pour avoir la distance du point m, représenté maintenant par m^h et $m^{v\prime}$, au plan P perpendiculaire à V', il faut abaisser de $m^{v\prime}$, qui est sur notre papier, une perpendiculaire $m^{v\prime} n^{v\prime}$ sur V'P; la longueur $m^{v\prime} n^{v\prime}$ de cette perpendiculaire est la longueur cherchée.

100. Simplification. (Épure 2.) Dans l'épure qui précède, nous avons disposé arbitrairement de la position de la droite L'T', que nous aurions pu faire passer par le point m^h (pour plus de simplicité nous avons déjà fait passer A^h par m^h); p' se confondrait avec m^h, comme l'indique la figure 2, et les mêmes raisonnements conduisent à la listance $m^{v'}n^{v'}$, précisément égale à celle que nous avions trouvée tout à l'heure, parce que nous avons conservé les mêmes données.

On obtiendrait encore d'autres vérifications en conservant le plan primitif de projection V, et en remplaçant, au contraire, le plan H par un plan H', perpendiculaire à la fois au plan P et au plan primitif de projection V.

101. Retour aux plans primitifs de projection. Si, dans le plus grand nombre des cas, la connaissance exacte de la distance que nous venons de trouver suffit, il est cependant nécessaire, dans d'autres circonstances, de connaître en outre la position de la normale B par ses projections B^h et B^v sur les plans primitifs de projection, et en particulier de pouvoir déterminer les projections n^h et n^v du point de rencontre de cette normale avec le plan P.

Occupons-nous de cette détermination sur l'épure : $m^{v'}n^{v'}$ est la projection $B^{v'}$ de la droite B sur le plan V'; cette droite, qui est perpendiculaire au plan P, est parallèle au plan V', qui lui-même est perpendiculaire à ce plan; donc sa projection sur le plan H sera une parallèle à la ligne de terre L'T', menée par le point m^h, puisque cette droite passe par le point m dans l'espace; n^h s'obtiendra par la rencontre de cette parallèle B^h à la ligne de terre, avec la perpendiculaire $n^{v'}n^h$ abaissée de la projection $n^{v'}$ sur L'T' : nous avons donc en n^h la projection sur le plan primitif H du pied n de la perpendiculaire abaissée du point m sur le plan P.

Pour trouver ensuite la projection n^v de ce même point sur le plan V, il faut abaisser la perpendiculaire n^hr du point n^h sur la ligne de terre LT des deux plans simultanés de projection H et V et prendre $n^vr = n^{v'}r'$: la normale est alors parfaitement connue par ses deux projections B^h et B^v sur les plans primitifs. Quant à l'épure 2, qui n'est que l'épure générale simplifiée, on trouve immédiatement n^h, qui est placé sur la ligne de terre L'T',

puisque le plan V′ défini par cette ligne contient à la fois le point *m* et le point *n*. La projection n^v se conclut comme précédemment, et les projections de la normale sur les plans primitifs sont encore B^h et B^v, n^v et n^h étant les projections sur les mêmes plans de son pied *n* dans le plan P.

PROBLÈME III. *Trouver la plus courte distance d'un point* m *à une droite* A.

102. SOLUTION. La géométrie nous apprend que pour avoir cette plus courte distance, il faut abaisser du point *m* une perpendiculaire sur A; cette perpendiculaire rencontrera la droite en *n*, et la longueur *mn* sera la distance cherchée.

Pour appliquer à cette question la méthode générale des changements de plans, il nous faut d'abord concevoir une situation des plans de projection telle, que sur l'un d'eux la projection de la perpendiculaire *mn* soit égale à cette longueur elle-même dans l'espace, ce qui exige que ce plan de projection soit parallèle à la droite *mn*, que nous appellerons B. Or, cette droite B est perpendiculaire à A, par conséquent elle est parallèle à tout plan perpendiculaire à A; c'est donc, en définitive, un plan de projection perpendiculaire à la droite A, fixe de position dans l'espace, que nous devons chercher à obtenir. La projection de la droite A sur un tel plan se réduira à un point; le point *n*, pied de la perpendiculaire, se confondra avec lui en projection sur ce même plan, et dès lors la projection de la portion *mn* de la droite B sera connue de direction, puisqu'elle passe aussi par la projection du point *m*, et la distance cherchée se trouvera immédiatement représentée en vraie grandeur.

Nous aurons donc résolu le problème lorsque nous aurons remplacé le système actuel des plans de projection V et H, définis par la ligne de terre LT, par un autre système de plans rectangulaires, tel, que l'un d'eux, celui qui remplacera le plan H, par exemple, soit perpendiculaire à la droite A, donnée de position invariable dans l'espace.

Mais un pareil plan ne sera pas, en général, perpendiculaire au plan V; il ne pourra donc pas être employé simultanément comme plan de projection avec ce plan V, qu'il nous faut par conséquent remplacer par un plan V′ tellement choisi de posi-

tion qu'il puisse être employé d'abord simultanément avec le plan de projection primitif H, et ensuite avec un plan H″ perpendiculaire à la droite A; ce plan V′ n'est donc pas arbitraire, il doit être à la fois perpendiculaire au plan H et au plan H″, double condition à laquelle satisfera tout plan parallèle au plan projetant de la droite A sur le plan H. Un tel plan est en effet perpendiculaire à H, puisqu'il est un plan projetant sur ce plan; il est aussi perpendiculaire à H″, car il est parallèle à la droite A perpendiculaire à ce plan H″ : c'est donc cette position que nous devrons donner au plan V′.

La solution du problème proposé, par la méthode des changements de plan, est donc celle-ci :

Remplacer le plan V par un plan V′ qui, employé simultanément avec H, devra être parallèle au plan projetant de la droite A sur le plan H, et qui sera par conséquent défini sur ce plan par une ligne de terre parallèle à A^h.

Remplacer le plan H par le plan H″ qui, employé simultanément avec V′, devra être perpendiculaire à la droite A; nous verrons, en construisant l'épure, comment ce plan sera graphiquement défini.

Construire successivement les données de la question sur ces deux plans de projection. La droite A se projettera sur H″ en un seul point $A^{h''}$, le point m y sera représenté par sa projection $m^{h''}$. La distance entre ces deux points est la longueur que l'on désire obtenir. (Voy. pl. XX, fig. 1.)

103. Épure. Les plans de projection H et V, sur lesquels les données de la question se trouvent indiquées, sont définis par la ligne de terre LT; A^h et A^v sont les projections de la droite A; m^h et m^v sont celles du point m.

Nous remplaçons le plan V par un plan V′ perpendiculaire à H, et défini par une parallèle L′T′ à la projection A^h de la droite A. Que deviennent les données de la question sur le nouveau système des deux plans de projection H et V′ simultanément employés, ou plutôt quelles sont les projections du point et de la droite sur le plan V′, car les projections sur le plan H n'ont pas varié?

La projection $m^{v'}$ du point m s'obtiendra en abaissant la perpendiculaire $m^h p'$ sur la nouvelle ligne de terre L′T′, et en

prenant sur le prolongement de cette ligne une longueur $p'm^{v'}$ égale à pm^{v} qui est, en vraie grandeur, la distance du point m au plan H qui est encore un de nos plans de projection ; $m^{v'}$ est la nouvelle projection du point m.

On trouvera la projection $A^{v'}$ de la droite A sur le plan V', en opérant sur deux des points de cette droite, choisis arbitrairement comme nous venons d'opérer sur le point m : c'est ce que nous avons fait sur notre épure par rapport aux points a, trace horizontale de la droite A, et b^{0} trace verticale de cette droite sur le plan primitif V. La projection sur V' de a est $a^{v'}$ sur la ligne de terre L'T' ; la projection $b^{v'}$ de b^{0} s'obtient en prenant $b^{v'}r' = b^{0}b^{h}$.

Nos plans de projection simultanés étaient d'abord H et V, ils sont maintenant H et V', et il faut qu'ils deviennent V' et H'', H'' étant perpendiculaire à la droite A dans l'espace. Cette droite A, considérée par rapport aux plans de projection H et V', est parallèle à l'un des plans de projection, au plan V' que nous allons conserver; tout plan perpendiculaire à cette droite A coupera donc le plan V' suivant une perpendiculaire à $A^{v'}$. Nous pouvons remarquer déjà qu'en abaissant de $m^{v'}$ une perpendiculaire sur $A^{v'}$, cette ligne sera la projection sur le plan V' de la perpendiculaire cherchée B à la ligne A; car la droite A étant parallèle au plan V', tout plan perpendiculaire à cette droite sera en même temps perpendiculaire à V', et c'est suivant sa trace, nécessairement perpendiculaire à $A^{v'}$, que se projettera une normale quelconque B qu'il contiendrait ; $n^{v'}$ sera la projection du pied n de cette normale, et l'on trouvera la projection sur le plan primitif H en abaissant la perpendiculaire $n^{v'}q'$ sur L'T', et en la prolongeant jusqu'à la rencontre n^{h} avec la projection A^{h} de la droite A sur ce même plan H ; $m^{v'}n^{v'}$ n'est pas encore la vraie grandeur de la perpendiculaire cherchée, et pour l'obtenir il faut employer un quatrième plan de projection parallèle à B et par conséquent perpendiculaire à la droite donnée A ; et comme c'est l'intersection d'un plan situé de cette manière dans l'espace que nous devons prendre pour ligne de terre, nous voyons que notre nouveau plan H'' sera défini par une perpendiculaire quelconque L''T'' à $A^{v'}$; cherchons sur ce plan H'' les projections du point et des droites.

La projection $m^{h''}$ du point m qui correspond à la projec-

tion $m^{v'}$ du même point sur le plan V' est sur la perpendiculaire $m^{v'}p''$ à la ligne de terre L''T'', et sa distance à cette ligne est $m^{h''}p'' = m^h p'$. La droite A est représentée en projection sur V' par $A^{v'}$, et en projection sur H'' par un point unique situé quelque part sur son prolongement, car $A^{v'}$ est perpendiculaire à la ligne de terre. Le point n, qui était tout à l'heure projeté en $n^{v'}$ et n^h, aura pour projection sur H'', $n^{h''}$ que l'on obtiendra en prenant $n^{h''}q'' = n^h q'$; et puisqu'il se trouve sur la droite A, c'est précisément en ce point $n^{h''}$ que cette droite se projettera tout entière sur le plan H''.

Dès lors $m^{h''}n^{h''}$ est la projection de la distance cherchée mn, et comme la droite B sur laquelle cette distance est comptée est parallèle au plan de projection H'', elle s'y trouve projetée en vraie grandeur; $m^{h''}n^{h''}$ mesurée avec un mètre exprime exactement la distance cherchée du point m à la droite A.

104. Simplification. (Épure 2.) Pour l'intelligence de la méthode nous avons conduit arbitrairement les deux lignes de terre L'T', L''T'', les exigences de la solution nous permettant, à cet égard, toute liberté, si ce n'est pour leurs directions : la première doit être parallèle à A^h, la seconde perpendiculaire à $A^{v'}$. Nous allons voir maintenant combien l'épure serait plus simple si nous avions pris pour ligne de terre L'T' la projection A^h elle-même, et pour L''T'', une ligne passant par $a^{v'}$.

Dire que nous prenons pour la ligne de terre qui doit définir le plan V' sur le plan H, la projection A^h de la droite A, c'est montrer que nous prenons pour le plan V' le plan projetant de cette droite A sur le plan H. La droite elle-même est dans ce plan, sa projection sur le plan H se confond avec la ligne de terre L'T', et sa projection sur V' s'obtient immédiatement en joignant le point a, où elle rencontre la ligne de terre, avec la projection $b^{v'}$, trouvée comme précédemment.

Puis, quand nous prendrons la ligne L''T'' perpendiculaire à $A^{v'}$ pour définir le plan H'', nous voyons immédiatement que $A^{v'}$ étant elle-même la ligne A qui se trouve dans le plan V', ce que nous exprimons en écrivant $\underline{A}^{v'}$ au lieu de $A^{v'}$, sa projection sur le plan H'' est le point a lui-même où elle rencontre la ligne L''T''; dès lors, ayant déterminé $m^{h''}$ en prenant comme précédemment $m^{h''}p'' = m^h p'$, il suffira de joindre dans le plan de

l'épure a à $m^{h''}$ pour avoir immédiatement en $am^{h''}$ la vraie distance cherchée.

105. Observation. Cet exemple est à la fois fort remarquable en ce qu'il indique les simplifications qu'amène un bon choix dans la position des plans de projection successifs, et surtout parce qu'il met en lumière une des propriétés principales de la méthode générale des changements de plan. Dans l'épure 1, toutes nos constructions se trouvent resserrées en un très-petit espace, tandis qu'elles s'étendent beaucoup plus dans l'épure bien plus simple qui porte le numéro 2. Si notre papier s'était trouvé plus petit, on comprend donc que nous aurions pu être embarrassé en n'indiquant pas la solution générale. L'insuffisance du papier est, en effet, un inconvénient que les méthodes ordinaires ne permettent que difficilement d'éviter, lorsqu'on n'a plus affaire aux données arbitraires d'un livre, mais aux données réelles de la pratique; et quand on songe que dans les arts les épures sont ordinairement effectuées sur des pans de murs ou des aires nivelées dont on ne peut, comme pour une feuille de papier, augmenter les dimensions, on a la raison de l'importance que l'on doit attacher aux solutions nouvelles qui, d'une manière simple, mettent à l'abri de cet inconvénient.

106. Retour aux plans primitifs de projection. Le problème qui s'énonce en général ainsi: par un point donné mener une droite perpendiculaire à une droite donnée, et construire les projections du point de rencontre des deux droites, se trouve en partie résolu par la construction qui précède, en ce que nous connaissons déjà la longueur de cette perpendiculaire; nous avons mené en $m^{h''}A^{h''}$ (épure 1) la projection $B^{h''}$ de cette perpendiculaire B sur le plan H'', et en $m^{v'}n^{v'}$ sa projection $B^{v'}$ sur le plan V'. En partant de ces données rien n'est plus facile que de trouver les projections B^h et B^v de cette droite B sur les plans primitifs de projection H et V.

Puisque nous connaissons les projections m^h et m^v du point m par lequel passe cette droite, il suffira de chercher les projections correspondantes du point n, point de rencontre demandé dans l'énoncé que nous venons de reproduire.

Or, connaissant $n^{v'}$ et $n^{h''}$, on en conclut immédiatement n^h par la perpendiculaire $n^{v'}q'$ à la ligne de terre L'T' et en prenant $n^h q' = n^{h''} q''$; puis, de ce point n^h on arrive à n^v par la perpendiculaire $n^h q$ à la ligne de terre primitive LT en faisant $n^v q = n^{v'} q'$. Mais on peut encore opérer d'une manière plus simple qui nous fournit immédiatement plusieurs vérifications : le point n est placé sur la droite A, donc ses projections sur des plans quelconques doivent se trouver sur les projections mêmes de la droite sur ces différents plans; donc n^h doit se trouver sur A^h, n^v sur A^v, et si les constructions précédentes n'avaient point amené à ce résultat, ce serait évidemment la preuve d'une erreur commise dans la série des opérations.

On ne saurait attacher trop d'importance à toutes les vérifications que l'on peut ainsi obtenir dans le cours d'une épure, et quoique l'habitude de lire sur une épure et de se représenter les choses dans l'espace, en indique à chaque instant, nous aurons soin d'appeler souvent l'attention de nos lecteurs sur celles que nous rencontrerons.

Dans l'épure 2 le point $n^{v'}$ est donné par la perpendiculaire $m^{v'}n^{v'}$ à $A^{v'}$; on en déduit n^h de la même manière que précédemment, puis n^v. Les projections de la perpendiculaire sur les plans primitifs de projection sont toujours B^h et B^v.

Problème IV. *Construire la plus courte distance de deux droites* A *et* B.

107. Solution. Pour déterminer quel est le cas spécial dans lequel la solution de ce problème peut se trouver par une construction simple effectuée dans l'un des plans de projection, il suffit de remarquer que si l'une des droites était perpendiculaire à l'un des plans de projection, elle s'y projetterait en un point unique, et toute droite passant par l'un quelconque des points de la ligne ainsi située, aurait pour projection une droite qui passera par ce point; mais lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute droite perpendiculaire à celle-là est parallèle au même plan. C'est précisément ce qui arrive pour la plus courte distance, qui, dans cette position particulière, se projettera en vraie grandeur.

Si nous appelons A cette ligne droite perpendiculaire au plan

de projection, nous savons donc que toute perpendiculaire D à cette droite aura pour projection sur H, par exemple, une droite D^h passant par le point A^h, et aboutissant à la projection B^h de la droite B.

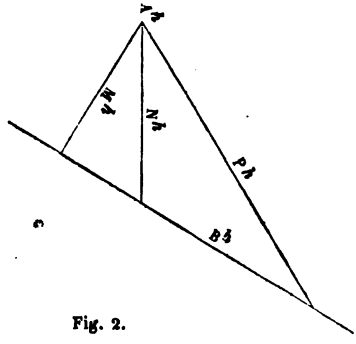


Fig. 2.

Toutes les perpendiculaires M, N, P à la droite A seraient, d'après ce que nous venons de dire, projetées en vraie grandeur en M^h, N^h, P^h par exemple, figure 2; par conséquent la plus courte de toutes ces perpendiculaires sera celle qui aura la projection horizontale la plus courte, ce sera celle dont la projection M^h est perpendiculaire à B^h, car $A^h m^h$ qui mesure la portion de cette perpendiculaire comprise entre A^h et B^h, est plus courte que toute oblique N^h ou P^h *.

En résumé, si A est perpendiculaire au plan H de projection, il suffira d'abaisser du point unique qui constitue sa projection A^h une perpendiculaire C^h sur B^h, et la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point et la droite sera la longueur cherchée.

C'est donc cette circonstance spéciale dans laquelle nous n'avons à effectuer qu'une construction extrêmement simple sur le papier, qu'il nous faut substituer au cas général; il faut parvenir à avoir un plan de projection perpendiculaire à la droite A; il faut donc renouveler les opérations que nous avons déjà effectuées dans le problème précédent, au moyen de deux changements de plan; et lorsque nous aurons obtenu sur ce plan perpendiculaire à A les projections de A et de B, nous

* Nous remarquerons ici que nous n'empruntons à la géométrie élémentaire que ce seul principe, que la plus courte distance entre deux droites est perpendiculaire à l'une d'elles, ce qui paraîtra évident si l'on observe que si *b* était le point où la plus courte distance rencontre la droite B, et si la plus courte distance était, par impossible, une oblique par rapport à A, on pourrait cependant abaisser du même point *b* une perpendiculaire plus courte encore sur la droite A.

n'aurons plus qu'à opérer sur ce plan, comme l'indique le raisonnement que nous venons de développer. (Voy. pl. XXII.)

108. Épure. Ce serait faire un double emploi que de répéter ici ces constructions, pour l'intelligence desquelles nous renvoyons à l'épure précédente.

A est donnée par ses deux projections A^h et A^v; B par ses deux projections B^h et B^v.

Nous prenons un premier plan parallèle au plan projetant de la droite A; et, pour la simplicité des opérations, nous avons même pris pour ce plan, qui doit nous servir simultanément avec H, le plan projetant de A sur ce plan H; la ligne de terre L'T' qui définit le nouveau plan V', est alors la projection A^h elle-même.

A^h et B^h ne varient point, A^v est remplacé par $A^{v'}$ que l'on obtient en cherchant la nouvelle projection $l^{v'}$ d'un de ses points l, projeté primitivement en l^v; et comme $A^{v'}$ est dans le plan V', nous prendrons soin de souligner la notation et d'écrire $\underline{A}^{v'}$. $B^{v'}$ s'obtient de la même façon en opérant sur la ligne de terre L'T' au moyen des projections primitives de deux des points de cette ligne. Nos données sont alors (A^h, $A^{v'}$)(B^h, $B^{v'}$), et nous effectuons un nouveau changement de plan pour que A soit perpendiculaire au nouveau plan H'' que nous allons employer simultanément avec V', et qui se trouve défini ainsi que nous l'avons vu dans le problème précédent par une ligne de terre L''T'' perpendiculaire à $A^{v'}$.

Le plan V' ne changeant pas, $A^{v'}$ qui est la droite A elle-même située dans ce plan, se projette sur la nouvelle ligne de terre en un seul point $A^{h''}$. $B^{h''}$ se déduit de $B^{v'}$ et de B^h par les opérations que nous avons indiquées déjà, et nos données sont alors sur les plans V' et H'' que nous considérons comme étant sur notre feuille de papier ($A^{h''}$, $A^{v'}$), ($B^{h''}$, $B^{v'}$), et l'une de nos droites A est perpendiculaire au plan H'', c'est-à-dire que la circonstance particulière que nous recherchions se trouve réalisée.

De $A^{h''}$ abaissons maintenant la perpendiculaire $A^{h''}n^{h''}$ sur $B^{h''}$, et nous obtiendrons la projection $D^{h''}$ de la plus courte distance cherchée sur le plan H'', et même en $A^{h''}n^{h''}$ cette plus courte distance en vraie grandeur.

109. Retour aux plans primitifs de projection. La droite D étant parallèle au plan H″ de projection, nous savons déjà que sa projection sur le plan V′ simultané de H″ est une parallèle à L″T″ ligne de terre qui définit ces deux plans l'un par rapport à l'autre; le point $n^{v'}$ de cette projection $D^{v'}$ est immédiatement connu en prolongeant jusqu'à $B^{v'}$ la perpendiculaire abaissée du point $n^{h''}$ sur L″T″, et par suite $D^{v'}$ est la droite $n^{v'}l^{v'}$ menée par $n^{v'}$ parallèlement à la même ligne de terre. La droite D nous étant maintenant donnée par ses deux projections $D^{h''}$ et $D^{v'}$ sur les plans H″ et V′ simultanément employés, il ne saurait y avoir aucune difficulté pour passer de ces projections à D^h, puis à D^v, en opérant, ainsi que l'examen de l'épure suffira pour le faire comprendre, sur deux des points l et n de cette droite; la plus courte distance cherchée se trouve enfin projetée en D^h et D^v, et nous posséderons ses points de rencontre l et n avec les deux droites A et B sur les projections primitives. Si l'on voulait obtenir la preuve que les opérations ont été bien conduites, on chercherait directement la distance du point l au point n donnés tous deux par leurs projections l^h et l^v, n^h et n^v; et à moins d'avoir commis quelque erreur, la distance de ces deux points devra être égale à la longueur déjà trouvée sur l'épure $A^{h''}n^{h''}$ de la plus courte distance projetée en vraie grandeur sur le plan H″.

110. Observation. Si les deux droites se rencontraient, la plus courte distance serait nulle; mais on est averti à priori de cette circonstance par l'examen même des données de la question. Si, en effet, les droites se coupent, le point où leurs projections sur le plan H se rencontrent étant nécessairement la projection sur ce plan de leur point commun, cette projection et celle du même point sur le plan V, doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; et la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites se rencontrent, consiste en ce que cette perpendiculaire vienne exactement passer par le point de rencontre des projections des deux droites sur le plan V.

On aura donc soin, avant de chercher à résoudre le problème de la plus courte distance, de s'assurer que cette plus courte distance existe, et qu'elle n'est pas nulle.

PROBLÈME V. *Deux droites* A *et* B *étant données, construire l'angle qu'elles forment entre elles.*

111. Nous supposerons d'abord que les deux droites sont contenues dans un même plan dont on puisse au moins déterminer une des traces.

SOLUTION. Dans quelles conditions l'angle de deux droites sera-t-il donné en vraie grandeur par l'angle de leurs projections?

Est-il possible de réaliser ces conditions en substituant de nouveaux plans de projection aux anciens, les droites restant invariables de position dans l'espace?

Telles sont, nous ne saurions trop insister sur ce point, les questions fondamentales auxquelles chacun doit s'efforcer de répondre : se les faire souvent, est un moyen sûr de se rendre promptement familières les solutions de la géométrie descriptive.

En présence de ces questions, qui ne voit de suite que l'égalité entre l'angle des deux droites et l'angle de leurs projections ne saurait exister qu'autant que le plan de projection serait parallèle à chacune d'elles, et par conséquent à leur plan? C'est donc un plan ainsi situé que nous devrons prendre pour remplacer l'un des plans de projection, le plan H par exemple; mais un pareil plan n'est pas, en général, perpendiculaire au plan V, il ne pourra servir simultanément avec lui de plan de projection, et il faudra par conséquent se servir d'un plan intermédiaire V', tellement placé qu'il puisse servir successivement de plan de projection, d'abord avec le plan H, puis avec le plan H' parallèle aux deux droites données; ce plan intermédiaire V' doit donc être à la fois perpendiculaire à ces deux plans, condition à laquelle il ne pourra satisfaire que s'il est perpendiculaire à leur intersection commune, nécessairement parallèle à la trace HP du plan qui contient les deux droites; sa trace sera donc perpendiculaire à cette trace HP; et, comme cette trace n'est autre chose que la ligne de terre L'T', qui devra définir le plan intermédiaire V' sur le plan H, nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour résoudre le problème proposé, ainsi qu'il suit :

Remplacer le plan V de projection par un plan V' défini sur

le plan H par une ligne de terre perpendiculaire à la trace du plan qui contient les deux droites.

Représenter sur le plan V′ les deux droites données A et B.

Remplacer le plan H de projection par un plan H″ parallèle aux deux droites données, et pour lequel nous déterminerons la position de la ligne de terre sur l'épure même.

Retrouver sur ce plan les deux projections des droites A et B; l'angle de ces deux projections $A^{h''}$ et $B^{h''}$ sera précisément l'angle cherché. (Voy. pl. XXIV.)

112. Épure. Les deux droites A et B sont quelconques dans l'espace; elles ne sont assujetties qu'à une seule condition, celle de passer par un même point, ce qui revient à dire que leurs projections sur le plan V se rencontrent en un certain point m^v, qui se trouve sur la même perpendiculaire à la ligne de terre LT que le point m^h de rencontre de leurs projections A^h et B^h sur le plan H.

Les traces a, b de ces droites sur le plan H doivent se trouver sur la trace du plan qui contient les droites; cette trace du plan sera donc HP, et nous avons à prendre, pour définir le plan V′, une ligne de terre L′T′, dont la direction seule est déterminée : nous mènerons donc une perpendiculaire quelconque L′T′ à la droite HP, et il nous faut construire les projections $A^{v'}$ et $B^{v'}$ des droites A et B sur le plan V′ défini par la ligne L′T′, et employé simultanément avec le plan primitif H.

m étant un point qui appartient aux deux droites, nous chercherons d'abord sa projection $m^{v'}$ sur le plan V′, en observant que ce point doit se trouver sur la perpendiculaire $m^h p'$ à la ligne de terre L′T′, et que l'on doit avoir $m^{v'}p' = m^v p$. Déterminons encore les projections a et b des traces sur le plan H, des deux droites A et B. Ces projections s'obtiendront en abaissant, de a et b, des perpendiculaires à L′T′; mais ces perpendiculaires se confondront nécessairement avec HP qui, par construction, est elle-même perpendiculaire sur L′T′; les deux points $a^{v'}$ et $b^{v'}$ se confondent, et nous apprenons ainsi que nos deux droites ont toutes deux pour projection sur le plan V′ la même droite $a^{v'}$ $m^{v'}$, ce que nous pouvions, au reste, prévoir, car le plan tout entier qui contient les deux droites devant être perpendiculaire à V′, tout

ce qui se trouve dans ce plan, les droites A et B comme toutes autres, doivent se projeter sur une seule et même ligne.

Nos deux droites sont maintenant exprimées par leurs projections sur les plans simultanés de projection H et V'; il faut trouver leurs nouvelles projections sur un nouveau plan H'' parallèle au plan des deux droites et rencontrant par conséquent le plan V' suivant une parallèle L''T'' à $A^{v'}$, qui est en même temps $B^{v'}$.

Pour rapporter le point m à ce nouveau plan, nous menons $m^{v'}p''$ perpendiculairement à L''T'', et nous prenons $m^{h''}p'' = m^{h}p'$, en ayant soin de porter cette première distance en arrière du point p'', parce que m^{h} est en arrière du point p'. Les projections $a^{h''}$ et $b^{h''}$ des points a et b sur le plan H'' se trouveront ensuite en prenant sur la perpendiculaire $a^{v'}q''$ à L''T'', $a^{h''}q'' = aa^{v'}$, $b^{h''}q'' = ba^{v'}$; les droites A et B sont donc projetées respectivement en $A^{h''}$ et $B^{h''}$; et, comme elles sont toutes deux parallèles au plan de projection H'', l'angle α que font entre elles ces projections est égal à l'angle des droites elles-mêmes.

113. Simplifications. Elles consistent à faire passer les deux lignes de terre L'T', L''T'' par des points remarquables de la question. Par exemple L'T' passe par le point m^{h}, ce qui revient à dire que le plan V' contient alors ce point m, que l'on obtient lui-même au lieu de sa projection $m^{v'}$. La ligne de terre L''T'' peut occuper aussi la position particulière déterminée par $A^{v'}$ et $B^{v'}$, c'est-à-dire que le plan H'' serait le plan même des deux droites, en sorte que les projections $A^{h''}$ et $B^{h''}$, des droites A et B sur le plan H'', seraient remplacées par ces droites elles-mêmes, ce que l'on exprimerait en écrivant $\underline{A}^{h''}$ au lieu de $A^{h''}$, $\underline{B}^{h''}$ au lieu de $B^{h''}$.

Cas où les droites ne se coupent pas.

114. Lorsque les droites A et B ne se coupent pas, on sait que la mesure de l'angle des deux droites est donnée par l'angle que fait la droite A avec une parallèle B' menée par l'un quelconque a de ses points à l'autre droite B.

Le problème, dans ce cas général, peut donc se ramener à celui dans lequel les droites se coupent, si l'on se rappelle qu'il

faut et qu'il suffit, pour que deux droites B et B′ soient parallèles, que le parallélisme existe entre leurs projections. Cette construction préliminaire de la parallèle ne présente aucune difficulté après ce que nous avons déjà dit à cet égard, et nous nous dispenserons d'y consacrer une épure spéciale.

Il est bon de savoir cependant que l'on peut arriver directement à construire l'angle des deux droites, même lorsqu'elles ne sont pas situées dans un même plan, tout en se dispensant de tracer cette parallèle; il peut arriver d'ailleurs que la trace du plan qui contient les deux droites ne puisse être facilement obtenue, et cette circonstance nous engage à donner de ce problème une solution générale qui n'exige autre chose que l'application de la méthode des changements de plan, qui seule nous a servi dans toutes nos applications.

Dans ce problème général, comme dans les deux suivants, où il s'agit de construire, soit l'angle de deux plans, soit l'angle d'une droite et d'un plan, nous verrons que deux changements de plan ne suffisent pas, et qu'il en faut opérer un troisième.

115. Solution générale. Reproduisons encore notre question habituelle : dans quelles conditions l'angle des deux droites sera-t-il donné en vraie grandeur par l'angle de leurs projections? Ce sera évidemment lorsque les projections des deux droites seront respectivement parallèles à elles-mêmes, ce qui exige que l'une et l'autre droite soient parallèles au plan de projection sur lequel se prendra la mesure.

Est-il possible de réaliser ces conditions en substituant de nouveaux plans de projection aux anciens, les droites restant invariables de position dans l'espace? Sans doute, puisque nous en avons vu un exemple dans le cas où les droites sont dans un même plan, et qu'alors le plan de projection est parallèle à toute droite qui sera parallèle à l'une ou à l'autre.

Mais comment réaliser ces conditions sans construire le plan qui contient à la fois la droite A et une parallèle à la droite B, menée par un de ses points? Nous avons déjà plusieurs fois changé de plan, de telle manière qu'un plan de projection H″ soit perpendiculaire à une droite A; si nous étions dans cette position, n'est-il pas vrai que le plan V′, employé simulta-

nément avec H'', étant parallèle à A, tout autre plan V''' employé simultanément avec H'' sera aussi parallèle à cette droite A, qui est perpendiculaire à H'', car tout plan simultané avec ce plan lui est perpendiculaire, et parallèle par conséquent à toute droite qui lui est perpendiculaire.

Puisque sans changer cette condition de parallélisme de la droite A avec le plan de projection employé simultanément avec H'', nous pouvons remplacer arbitrairement ce plan V' par un autre plan V'''; nous pouvons évidemment choisir ce plan V''' de telle sorte qu'il soit aussi parallèle à B, et alors les deux droites A et B étant à la fois parallèles à ce plan, l'angle de leurs projections sur ce plan V''' mesurera exactement l'angle des deux droites. C'est ainsi que nous allons opérer, en procédant successivement aux opérations suivantes :

Trouver les projections des droites A et B sur un plan V' perpendiculaire à H et parallèle à A.

Trouver les projections de ces droites sur un plan H'' perpendiculaire au nouveau plan V' et à la droite A, dont la projection $A^{h''}$ se trouvera dès lors réduite à un point.

Trouver les projections de ces droites sur un nouveau plan V''' perpendiculaire à H'' et parallèle à B, $A^{v'''}$ sera comme l'était $A^{v'}$, une perpendiculaire à la ligne de terre; la droite A sera comme B parallèle au nouveau plan V''', et l'angle des deux projections $A^{v'''}$ et $B^{v'''}$ sera l'angle cherché. (Voy. pl. XXVI.)

116. Épure. La ligne de terre L'T' qui définit le plan V' sur le plan H, doit, comme précédemment, être parallèle à A^h; n qui est la trace de A sur le plan H se projette en $n^{v'}$, m se projette en $m^{v'}$ en prenant $m^{v'}p' = m^v p$. Ainsi se trouve déterminée $A^{v'}$; $B^{v'}$ s'obtient de la même façon au moyen de deux points de B^h, desquels on abaisse des perpendiculaires suffisamment prolongées sur la ligne de terre L'T'.

La ligne de terre L''T'', qui définit le plan H'' sur le plan V', doit, comme précédemment, être perpendiculaire à $A^{v'}$; la projection $A^{h''}$ de cette droite perpendiculaire au plan H'' se réduit au point unique $A^{h''}$; $B^{h''}$ s'obtient en abaissant, de deux points de $B^{v'}$, des perpendiculaires sur la ligne de terre L''T'', et en portant sur ces perpendiculaires des longueurs telles que $m^h p'$.

Le troisième plan V''' devant être parallèle à B, il faut que la projection $B^{h''}$ de cette droite sur le plan H'' soit parallèle à la ligne de terre $L'''T'''$ qui définira sur ce plan H'' le plan V''' qui doit être employé simultanément avec lui. La direction de $L'''T'''$ se trouve dès lors déterminée par cette condition; $A^{v'''}$ sera donnée par la perpendiculaire abaissée de $A^{h''}$ sur $L''T''$, puisque la ligne A de l'espace est, par construction, perpendiculaire au plan H'', simultané de V'''; $B^{v'''}$ se construit au moyen de deux points de $B^{h''}$ comme précédemment, et l'angle cherché se trouve mesuré sur le papier par l'angle des deux droites $A^{v'''}$ et $B^{v'''}$.

On pourrait effectuer les mêmes opérations en remplaçant d'abord le plan H par un plan H', et on arriverait ainsi à un plan H'' parallèle aux deux droites sur lequel se trouverait encore l'angle cherché en vraie grandeur; ces deux constructions indépendantes, en conduisant au même angle, fourniraient une vérification.

117. Simplification. La projection A^h de la ligne A pouvait servir de ligne de terre $L'T'$; on pouvait faire passer $L''T''$ par le point de rencontre de $L'T'$, et de $A^{v'}$; enfin, rien n'empêchait de prendre $B^{h''}$ pour $L''T''$. Chacun de ces choix aurait concouru à la simplification de l'épure, et il nous suffit ici de donner cette indication générale pour mettre le lecteur en état d'effectuer les constructions simplifiées ainsi. Il nous a paru plus utile d'indiquer la solution générale qui se lit plus nettement sur l'épure, et qui s'explique sans confusion.

118. Observation. Dans les trois problèmes relatifs aux angles des droites ou des plans, il ne saurait y avoir d'inconvénient à remplacer les données de la question par des plans ou des lignes parallèles, toutes les fois qu'il y aurait avantage dans le tracé, la condition de parallélisme étant suffisante pour assurer l'invariabilité de l'angle ainsi construit.

Problème VI. *Deux plans étant donnés, construire l'angle qu'ils forment entre eux.*

119. Solution par l'angle de deux droites. L'angle de deux plans

se mesure par l'angle des perpendiculaires menées dans chaque plan, à l'intersection commune par un même point de cette intersection. Mais si l'on imagine que, par un point quelconque m de l'espace, on mène un plan perpendiculaire à cette commune intersection, puis, dans ce plan, deux perpendiculaires respectives aux deux plans, ces deux droites formeront, avec les intersections faites dans les plans donnés par ce troisième plan, un quadrilatère tel que ABmD (fig. 3) dans lequel les angles en B et en D seront droits, de telle sorte que, la somme des quatre angles d'un quadrilatère étant toujours égale à quatre angles droits, et les deux seuls angles en B et en D valant deux droits, la somme des deux autres sera aussi égale à deux droits ou 180°. Donc $A = 180° - m$. A, c'est l'angle des deux plans, m c'est l'angle des deux perpendiculaires abaissées respectivement par le point m sur les deux plans. L'angle des deux plans nous sera donc connu si nous savons construire l'angle des deux perpendiculaires, puisqu'il en est le supplément.

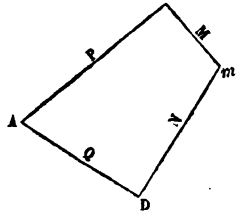


Fig. 3.

Cette solution peut immédiatement être effectuée en projection, car la projection M^h de la perpendiculaire M au plan P, passe par la projection m^h du point m, et est perpendiculaire à la trace HP, par laquelle ce plan P nous est donné sur le plan H de projection. De même N^h est perpendiculaire à HQ; de même encore M^v et N^v, passent toutes deux par m^v, et sont respectivement perpendiculaires aux traces VP et VQ des deux plans donnés, sur le plan V de projection.

Le problème est donc ramené à construire l'angle des deux droites (M^h, M^v), (N^h, N^v), qui passent toutes deux par le point arbitraire (m^h, m^v); soit α la valeur de cet angle que nous avons appris à déterminer, l'angle des deux plans sera $180° - \alpha$.

Nous ne produirons pas l'épure de cette solution, qui est souvent la plus rapide, ce serait répéter inutilement toutes les opérations de l'épure précédente. Il sera plus utile de faire voir comment la méthode générale des changements de plan peut directement résoudre le problème de l'angle de deux plans.

120. Solution directe. Dans quelle position l'angle des deux plans serait-il donné par l'angle de leurs traces respectives? Évidemment, quand l'un et l'autre de ces deux plans sont perpendiculaires à un même plan de projection, car alors les deux traces sont à la fois perpendiculaires à la commune intersection des deux plans, puisqu'elles passent par un point de cette commune intersection, et qu'elles sont situées dans un plan perpendiculaire à chacun des plans donnés.

Est-il possible de ramener toujours à cette position spéciale l'un des plans de projection, en laissant invariables les deux plans donnés P et Q? Nous savons déjà que nous pourrons, au moyen de deux changements de plan, faire en sorte que P, par exemple, soit parallèle à un plan de projection H″; P est alors perpendiculaire au plan V′ simultané de H″, car deux plans simultanés étant, par construction, perpendiculaires, V′ est perpendiculaire à H″, et par conséquent à tout plan P parallèle à H″. Ceci admis, il est facile de voir que P sera en même temps ~~parallèle~~ perpendiculaire à tout autre plan V‴ employé simultanément avec H″, et qu'ainsi on a la liberté de choisir ce plan V‴, de telle façon qu'il soit perpendiculaire au plan donné Q.

Le plan V‴ ainsi choisi, sera donc à la fois perpendiculaire à P et à Q; l'angle de ces deux plans sera donné par l'angle des deux traces de ces plans sur V‴.

121. Épure. Nous nous bornerons à indiquer les opérations successives du tracé, parce qu'elles rentrent dans celles que nous avons déjà pris l'habitude d'effectuer dans les problèmes précédents. (Voy. pl. XXVIII.)

Le plan H″, avons-nous dit, doit être parallèle à P, ce qui exige un plan intermédiaire V′ perpendiculaire à P, et pouvant être employé simultanément avec le plan H. Pour cela la ligne L′T′ qui définit le nouveau plan V′ sur le plan H, est une perpendiculaire à la trace HP du plan P. Nous déterminerons sur le plan V′ ainsi défini les traces V′P et V′Q des plans donnés.

Remplaçons maintenant H par H″, qui, étant parallèle à P, peut être employé simultanément avec le plan V′ que nous venons de trouver. Ce plan H″ est défini sur V′ par la ligne L″T″ parallèle à V′P; et connaissant cette ligne de terre L″T″, nous saurons

trouver la trace H″Q du plan Q sur ce plan H″. Quant à celle du plan P, il serait inutile de la chercher, car ce plan P étant, par construction, parallèle à H″, ne peut avoir de trace sur ce plan qu'il ne saurait rencontrer, et il est complétement déterminé par cette condition qu'il est parallèle au plan H″, et qu'il passe par sa trace V′P sur V′.

Enfin, remplaçons V′ par un nouveau plan V‴ perpendiculaire à Q, ce plan sera défini sur H″ par une ligne de terre L‴T‴ perpendiculaire à la trace H″Q du plan Q sur ce même plan H″; et c'est sur ce dernier plan V‴ qu'il nous faut trouver les traces des deux plans donnés. La recherche de V‴Q ne présente aucune difficulté; c'est là une opération que nous avons fréquemment effectuée, et la détermination de V‴P est bien plus simple encore; car, quel que soit le plan V‴ employé simultanément avec H″, V‴ est toujours perpendiculaire à H″ qui est lui-même parallèle à P; donc la trace V‴P est parallèle à la ligne de terre L‴T″, comme la trace V′P était elle-même parallèle à L″T″; et puisque la distance de P au plan H″ était mesurée sur l'épure par la distance entre la trace V′P et la ligne de terre L″T″, et que les deux plans parallèles H″ et P ne changent pas de position, il faudra que cette même distance soit encore celle de L‴T‴ à la trace V‴P de ce même plan P sur notre nouveau plan V‴.

L'angle de V‴P et de V‴Q est l'angle cherché.

122. Simplifications. On aurait pu prendre, pour ligne de terre L″T″, la trace même V′Q à laquelle elle doit être parallèle, ce qui revenait à prendre le plan P lui-même pour plan de projection. Par suite V‴P se serait confondu avec L‴T‴, et l'on aurait abrégé le nombre des lignes. Remarquons d'ailleurs que sans faire ce choix particulier de la position de L′T′, il n'était pas nécessaire de construire V‴P, puisque l'angle de V‴Q avec la ligne de terre L‴T‴ est précisément égal, comme angle formé entre une même droite et deux droites parallèles entre elles, à l'angle de V‴Q et V‴P.

P

Cas où l'on connaît l'intersection des deux plans.

123. Quand on peut construire l'intersection des deux plans

P et Q, on évite un changement de plan, car l'angle cherché est l'angle même des traces toutes les fois que l'intersection des deux plans est perpendiculaire au plan de ces traces, et nous avons appris déjà, par deux changements de plan, à faire que l'un des plans de projection soit perpendiculaire à une droite quelconque.

C'est donc ainsi qu'il faudra opérer dans ce cas; la connaissance de l'intersection nous tient lieu d'un changement de plan.

Cas où l'un des plans donnés se confond avec l'un des plans de projection.

124. S'il s'agit simplement de déterminer l'angle du plan P donné par ses traces avec l'un des plans de projection, le plan H, par exemple, la méthode générale des changements de plan permet d'arriver immédiatement à la construction de cet angle.

Si, en effet, le plan donné était perpendiculaire au plan V, l'angle que sa trace sur ce plan fait avec la ligne de terre, serait précisément l'angle cherché : car l'angle de ces deux droites n'est autre chose que celui des deux sections faites dans ces deux plans par un même plan perpendiculaire à la commune intersection qui est ici la trace. Toute la difficulté se réduit donc à remplacer le plan V par un plan V', auquel le plan donné soit perpendiculaire. Ce plan V' sera défini par une ligne de terre L'T' perpendiculaire à la trace HP du plan, et il suffira de trouver la nouvelle trace V'P sur ce plan V'.

C'est ce que représente l'épure, planche XXXII, figure 1. HP et VP sont les deux traces du plan donné; prenons un nouveau plan V' défini sur l'ancien plan horizontal H par L'T' perpendiculaire à HP; le point o' est déjà un point de la trace V'P du plan donné sur ce plan V'. Pour en obtenir un autre point, considérons, comme nous l'avons déjà fait, une droite menée dans le plan P parallèlement au plan H, la projection A^h de cette droite sera une parallèle quelconque à HP; et pour obtenir la projection A^v correspondante, il faut reporter le point a^h, où cette droite coupe la ligne de terre LT, sur la trace VP; on obtiendra de cette manière la trace a^v de cette droite sur le plan V, et sa projection sur ce plan sera la parallèle A^v à la ligne de terre.

Le point b de l'espace est représenté sur les plans H et V par ses projections b^h et b^v, et il est obtenu dans le plan V′ en $b^{v'}$ en prenant $b^h b^{v'} = b^v p$. Ce point b, appartenant au plan V′ et au plan P, est un des points de leur intersection ou de la trace de l'un sur l'autre; par conséquent la trace de P sur V′ est $o'b^{v'}$ ou V′P, et l'angle cherché étant mesuré par $b^{v'}o'$ T′, la solution du problème se trouve obtenue d'une manière très-simple.

Problème VII. *Construire l'angle formé par une droite et un plan donnés de position dans l'espace.*

125. Solution par l'angle de deux droites. Si, par un point quelconque de la droite A, on suppose, par la pensée, que l'on abaisse une perpendiculaire C sur le plan donné P, on démontre que l'angle des deux droites A et C est le complément de l'angle de la droite et du plan. On peut, en effet, par cette perpendiculaire C et la droite A, faire passer un plan, et ce plan sera perpendiculaire au plan donné; si l'on joint le pied de la perpendiculaire au pied de l'oblique, on se trouvera avoir dans ce plan un triangle MNR (fig. 4) dans lequel l'angle M est, par définition, l'angle de la droite avec le plan P; et ce triangle étant rectangle, l'angle en M est égal au complément de l'angle en N, c'est-à-dire que leur somme est égale à un angle droit ou 90°, en sorte que si l'on connaissait l'angle α des deux droites, la valeur de l'angle cherché serait exprimée par $90^0 - \alpha$.

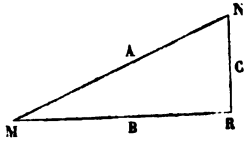


Fig. 4.

Et, comme nous savons, par un point, mener une perpendiculaire à un plan, puisque les projections de la perpendiculaire sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan, ce que nous avons dit de l'angle de deux droites nous permet de construire α, et par conséquent l'angle $90^0 - \alpha$ qui est l'angle cherché.

L'angle d'une droite et d'un plan étant défini par l'angle que fait la droite avec la ligne qui joint le pied de la droite et le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des points de cette droite sur le plan, nous remarquerons ici que cet angle n'est autre chose que l'angle de la droite avec sa projection sur le

plan; définition plus simple dont nous pourrons quelquefois nous servir.

Nous ne donnerons pas l'épure de la solution dont nous venons de parler, parce qu'elle ne serait qu'une répétition de l'épure précédente, et nous nous bornerons à décrire rapidement la solution directe que la méthode des changements de plans nous permet d'obtenir sans recourir à la perpendiculaire qui nous est, dans celle-ci, indispensable.

126. Solution directe. Dans quel cas l'angle de la droite A et du plan P sera-t-il donné en vraie grandeur par l'angle que comprennent sur l'épure la projection de la droite et la trace du plan?

L'angle d'une droite A et d'un plan P, c'est, ainsi que nous venons de le voir, l'angle que cette droite fait avec une autre droite B, qui joint, dans le plan, le pied de la droite A au pied de la perpendiculaire C, abaissée d'un point de A sur ce plan. Si nous connaissions le plan Q, qui contient A et B, la réponse à notre question serait facile, puisqu'il suffit, pour qu'un angle ou une figure plane quelconque se projette en vraie grandeur, que le plan Q qui la contient soit parallèle à l'un des plans de projection.

Déjà nous avons vu que ce choix d'un plan de projection parallèle au plan donné exige deux changements de plans, en sorte que si le plan Q était connu, nous savons à priori que deux changements de plan seulement conduiraient à la solution que nous cherchons.

Mais, sans construire ce plan Q, nous pouvons directement obtenir l'angle cherché par trois changements de plan, et en opérant seulement sur les données immédiates de la question. Il nous faut alors obtenir un plan H″ qui soit parallèle au plan P, ce qui peut se faire par deux changements de plan, et prendre ensuite, pour être employé simultanément avec H″, un nouveau plan V‴ parallèle à la droite A. P étant parallèle à H″ sera perpendiculaire à V‴, A lui est parallèle, et le plan Q, qui nous est inconnu et que nous ne cherchons pas à déterminer, sera dans cette position parallèle à V‴, puisque ce plan Q contient la droite A, et que nous savons qu'il est perpendiculaire à P, qui, dans cette position particulière, est parallèle au plan de projection H″.

Par conséquent l'angle cherché se projettera en vraie grandeur sur le plan V‴; et, comme tout ce qui est contenu dans le plan P perpendiculaire à V‴ a pour projection sur ce plan sa trace V‴P, la droite B, comme toute autre qui se trouverait contenue dans le plan P, l'angle cherché est précisément celui que forme la trace de ce plan sur V‴, avec la projection A‴ de la droite A. (Voy. pl. XXX.)

127. Épure. 1re *Opération.* Je remplace le plan V par un nouveau plan V′ tellement choisi, que V′ soit perpendiculaire à P et à H. Ce plan est défini sur le plan H par une ligne de terre L′T′ perpendiculaire à HP.

2e *Opération.* Je remplace le plan H par un nouveau plan H″, tellement choisi que H″ soit parallèle à P et puisse être employé, simultanément avec V′, comme plan de projection. Ce plan H″ est défini sur V′ par une ligne de terre L″T″ parallèle à V′P, et le plan P se trouve alors représenté par sa seule trace V′P; il n'a pas de trace sur le plan H″, auquel il est parallèle, et que par conséquent il ne peut rencontrer.

3e *Opération.* Je remplace le plan V′ par un nouveau plan V‴, tellement choisi que V‴ soit parallèle à A, et puisse être employé, simultanément avec H″, comme plan de projection. Ce plan V‴ est défini sur H″ par une ligne de terre L‴T‴, parallèle à la projection A″ de la droite A sur le plan H″. La trace H″P du plan P sur ce plan est nécessairement une parallèle à L‴T‴, puisque le plan P est parallèle au plan H″, qui est employé simultanément comme plan de projection avec V‴, et il n'est pas même nécessaire de la déterminer.

Les tracés qu'exigent ces opérations successives pourront être facilement suivis sur l'épure, car nous les avons déjà effectués dans les problèmes qui précèdent : l'angle cherché est celui que forme V‴P ou sa parallèle L‴T‴ avec A‴, il se voit en α sur l'épure.

128. Simplifications. Cette épure, déjà si remarquable par sa simplicité, peut encore se prêter à un retranchement de quelques lignes. En prenant, pour ligne de terre L″T″, la trace V′P elle-même, le plan H″ se confond avec le plan P, et par

suite $V'''P$ se confond avec $L'''T'''$, et l'on obtiendra encore une autre simplification en choisissant pour ligne de terre $L'''T'''$, la projection même $A^{h'''}$; la droite A se trouvera alors dans le plan V''', et, au lieu d'écrire $A^{v'''}$ sur sa projection, il faudra indiquer sur l'épure cette circonstance par la notation convenue $\underline{A}^{v'''}$.

L'exemple que nous avons choisi montre d'ailleurs que ces simplifications ne sont pas toujours possibles, car si nous avions voulu les appliquer, certaines circonstances de l'épure se seraient trouvées hors du papier. La solution générale, au contraire, suffit dans tous les cas, quelles que soient les données de la question, si l'on transporte dans des positions convenables les différentes lignes de terre.

Observation sur le choix de l'angle. Deux droites A et B, en se rencontrant, forment quatre angles qui sont deux à deux opposés par le sommet, et l'on sait que ces angles opposés par le sommet sont égaux. Lorsqu'il s'agit de l'angle de deux droites ou de l'angle de deux plans, rien n'oblige à prendre pour mesure de cet angle l'angle aigu α ou l'angle obtus β, parce que rien dans les définitions n'indique celui qui doit servir de mesure. Il n'en est plus de même pour le cas d'une droite et d'un plan. Rappelons-nous, en effet, que l'angle de la droite et du plan est défini par l'angle de la droite avec la ligne qui joint le pied de cette droite sur le plan avec le pied de la perpendiculaire abaissée de l'un quelconque de ses points sur le plan. Cet angle ne peut donc jamais être plus grand que 90°, ce sera l'angle aigu qu'il faudra prendre.

Cas dans lequel on connaît le plan des deux droites qui mesurent l'angle de la droite et du plan.

129. Le plan que nous avons appelé Q dans les raisonnements qui précèdent la solution du problème précédent, peut s'obtenir en abaissant, d'un point quelconque *a* de la droite donnée A, une perpendiculaire C au plan P. Nous savons mener cette perpendiculaire, puisque ses projections sont déterminées par cette double condition qu'elles doivent respectivement passer par les projections du point *a*, et être respectivement perpendiculaires aux traces du plan P.

Les droites A et B étant connues, on pourra construire la trace sur le plan V, par exemple, du plan Q, qui, contenant à la fois les droites A et C, contiendrait aussi la droite B, qu'il ne nous est pas nécessaire d'obtenir.

Toute la difficulté consiste alors à obtenir un plan de projection V″ parallèle au plan Q, à chercher, sur ce plan, la projection $A^{v''}$ de la droite A, et la trace V″P du plan P. Le plan Q, par construction, est perpendiculaire à P, par conséquent P se trouvera aussi, par construction, perpendiculaire à V″, qui est parallèle à Q, et tout ce qui existera dans le plan P, la droite B elle-même, qui sert à mesurer l'angle, se projettera sur la trace V″P, et l'angle cherché, qui est celui de A et de B, sera représenté en vraie grandeur par l'angle des projections $A^{v''}$ et $B^{v''}$, les deux droites A et B étant toutes deux contenues avec C dans le plan Q qui, par construction, est parallèle à V″.

Les opérations à effectuer sont les suivantes :

Déterminer la trace HQ du plan Q qui contient la droite A et la perpendiculaire C abaissée d'un point de cette droite sur le plan.

Remplacer le plan V par un plan V′ perpendiculaire au plan Q et rapporter sur ce plan la droite A et le plan P.

Remplacer le plan H par un plan H″ qui, employé simultanément avec V′ comme plan de projection, soit parallèle à Q, et rapporter sur ce plan la droite A et le plan P.

L'angle de $A^{h''}$ et de H″P sera l'angle cherché.

Cette fois encore la construction d'un plan nous a permis de réduire à deux, au lieu de trois, le nombre des changements de plan à effectuer.

Cas où le plan donné se confond avec l'un des plans de projection.

130. Les données se trouvent alors dans les conditions que nous avons substituées au cas général à l'aide des deux premiers changements de plan, et le troisième seul nous est nécessaire.

Solution. S'il s'agit de l'angle de la droite A avec le plan H, il faut remplacer le plan V par un plan V′ parallèle à la droite A. Nous prendrons pour ce plan V′ le plan projetant de la droite

sur le plan H. A est alors dans ce plan; ainsi que l'indique l'épure (Pl. XXIII, fig. 1), l'angle cherché est donné immédiatement par celui de $A^{v'}$ avec la ligne de terre L'T' qui peut être considérée come la trace du plan projetant de la droite donnée A sur le plan V'.

La construction s'opérerait de la même façon pour l'angle que fait la droite avec le plan V.

CHAPITRE III.

MÉTHODE GÉNÉRALE DES MOUVEMENTS DE ROTATION.

131. La méthode générale des mouvements de rotation a pour but, comme celle des changements de plans, de fournir des moyens à l'aide desquels on puisse résoudre la plupart des problèmes de l'espace par des opérations fort simples à exécuter sur une feuille de papier, en ramenant chacun de ces problèmes dans des conditions telles que les éléments que l'on cherche viennent se projeter, en figures parfaitement égales et superposables à eux-mêmes, sur l'un des plans de projection.

Elle est fondée sur ce que deux plans de projection rectangulaires étant choisis pour servir à la représentation d'un système de données géométriques, invariables de position les unes par rapport aux autres, il est facile d'amener ce système à occuper cette position dans laquelle les solutions se présentent d'elles-mêmes, en le faisant tourner autour d'axes essentiellement perpendiculaires à l'un ou à l'autre des plans de projection.

Nous allons voir que rien n'est plus simple que de savoir suivre les positions successives que viennent occuper, dans un pareil mouvement, les projections des points et des droites, ainsi que les traces des plans, pendant que ces points, ces droites et ces plans, qui composent le système donné, effectuent leur mouvement de rotation simultané autour des axes dont nous venons de définir la position.

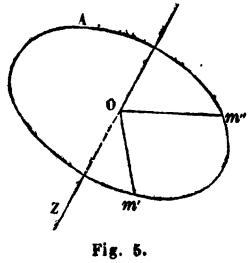


Fig. 5.

Supposons, pour un instant, qu'un certain point m étant lié d'une manière invariable à une tige rigide Z (fig. 5), cette tige vienne à tourner sur elle-même; il est facile de voir que le point m décrira dans l'espace une circonférence Δ, dont le rayon sera la distance r du point m à la tige, et dont le plan sera perpendiculaire à cet axe Z. Con-

sidérons en effet en m' et m'', deux positions différentes du point m dans son mouvement de rotation ; si o est le pied invariable de la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe Z, $m'o$ et $m''o$ seront deux lignes égales, toutes deux perpendiculaires à Z, car l'angle Zom', non plus que l'angle Zom'' n'aura pas cessé d'être droit, et ces deux perpendiculaires au point o à la même droite Z suffisent pour déterminer le plan dont ne peut sortir le point m dans son mouvement.

Si maintenant nous supposons que l'axe Z est perpendiculaire à l'un ou à l'autre des deux plans de projection que l'on emploie en géométrie descriptive, nous savons que le plan de la circonférence sera parallèle à ce plan de projection, et que, par conséquent la circonférence Δ se projettera sur ce plan de projection en une figure égale et superposable à elle-même.

Si Z, par exemple, est une ligne verticale, la circonférence décrite par le point m sera située dans un plan horizontal, et se projettera horizontalement sans déformation et en vraie grandeur.

Mais de ce que le plan R qui contient la circonférence Δ est parallèle au plan horizontal, il s'ensuit qu'il est perpendiculaire au plan vertical, et que par conséquent tout ce qui est contenu dans ce plan R se projette verticalement suivant la trace du plan R.

Ainsi, pour une pareille position de l'axe, les deux projections de la circonférence Δ sont, l'une une circonférence Δ^h identique avec la circonférence Δ de l'espace, et l'autre une ligne droite parallèle à la ligne de terre, car R est parallèle au plan horizontal. Une droite et une circonférence, ce sont deux lignes faciles à construire, et c'est pour cela que dans les mouvements de rotation que l'on effectue en géométrie descriptive, on n'emploie jamais que des axes perpendiculaires à l'un ou à l'autre des plans de projection : pour toute autre position des axes par rapport aux plans de projection, la circonférence Δ se projetterait suivant deux courbes qui seraient des ellipses, à l'exception encore de la position dans laquelle le plan R de cette circonférence serait perpendiculaire à la ligne de terre, auquel cas les deux projections de la courbe Δ se confondraient en une seule et même ligne droite qui ne saurait servir aux opérations que nous cherchons à effectuer.

Soit donc en m^h, m^v (Pl. XII, fig. 1), un point m qui tourne autour de l'axe vertical Z^h, Z^v, la circonférence qu'il décrira dans son mouvement aura, d'après ce que nous venons de dire, pour projection Δ^h et Δ^v; lorsque nous parlerons de mouvement de rotation, il sera toujours sous-entendu que c'est dans ces circonstances que nous opérerons, l'axe étant toujours perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Un point n, lié par la pensée d'une manière invariable au point m, décrira dans l'espace une autre circonférence Y plus petite ou plus grande que Δ, selon que n sera plus rapproché ou plus éloigné que m de l'axe de rotation. Les projections horizontale et verticale de cette nouvelle circonférence Y, seront encore une circonférence Y^h et une droite Y^v; l'axe étant toujours le même, ses projections n'ont pas varié de position, Y^h sera donc une circonférence concentrique avec la circonférence Δ^h, la droite Y^v sera parallèle à la droite Δ^v; Y^v passera par le point n^v, projection verticale du point n dans l'une de ses positions.

Si l'on se représente maintenant la droite M de l'espace qui, dans une certaine position, joignait le point m au point n, et qui aurait pu être représentée par ses projections $m^h n^h$, $m^v n^v$, nous pouvons déjà nous rendre compte de ce que sera devenue cette droite lorsque, après avoir tourné d'une certaine portion de circonférence, le point m sera arrivé en m' donné par ses projections m'^h sur Δ^h, m'^v sur Δ^v.

Si le point m avait fait un tour entier, il serait revenu exactement à son point de départ, et en même temps le point n serait venu se replacer dans sa première position. Puisque m et n sont invariablement liés, si m ne fait qu'un demi-tour, n aussi n'aura fait qu'un demi-tour; si m a tourné d'un quart de circonférence, n aussi aura tourné d'un quart, et généralement n aura tourné du même nombre de degrés que m, quelque petit ou quelque grand que soit le déplacement angulaire qu'auront simultanément subi les deux points dont nous nous occupons.

La position de n'^h qui correspondra à m'^h sera donc telle que l'angle $m^h O m'^h = n^h O n'^h$ en projection horizontale, ces angles étant tous deux mesurés dans le même sens, qui est celui indiqué sur la figure par la flèche f. La droite mn sera devenue dans l'espace $m'n'$, et ce déplacement sera accusé sur notre

épure, en ce que la projection horizontale $m^h n^h$ se sera transportée en $m'^h n'^h$.

Quant à la projection verticale de n', nous savons qu'elle se trouve sur Y^v, et nous la trouverons en n'^v, sur la perpendiculaire abaissée de n'^h sur la ligne de terre : les projections actuelles de la droite seront donc $m'^h n'^h$, $m'^v n'^v$.

Cette notation de lettres affectées d'un accent sera par nous exclusivement employée pour les nouvelles positions des éléments indiqués d'abord par les lettres simples; et, comme nous aurons à effectuer quelquefois plusieurs mouvements de rotation à la suite l'un de l'autre, nous dirons, par exemple, m', m'', m''', pour désigner la position du point m, après un, deux ou trois mouvements de rotation. La même notation s'appliquera aux lignes de l'espace et à leurs projections, aux plans de l'espace et à leurs traces; ainsi B' sera la position de la droite B après une seule rotation, B'^h sa projection horizontale; B''^v sera la projection verticale de la position B'', qu'est venue occuper la droite B après deux rotations, HP''' la trace horizontale du plan P après le troisième mouvement de rotation de ce plan.

Ce que nous disons pour une rotation autour d'un axe perpendiculaire à un plan horizontal de projection, est vrai aussi pour tout mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à tout autre plan de projection, et nous effectuerons fréquemment plusieurs de ces opérations successives autour de différents axes. Nous n'aurons toutefois ici qu'à nous occuper de projections horizontales et verticales; l'emploi de ces expressions, en quelque sorte consacrées par l'usage, qui particularisent dans l'espace la position des plans de projection, n'a plus l'inconvénient qui nous a forcé à les proscrire de la méthode des changements de plan; nous nous en servirons constamment, en nous bornant, une fois pour toutes, à prévenir que les mêmes constructions et les mêmes conséquences sont également applicables à tout système de deux plans de projection rectangulaires, quelle que soit d'ailleurs leur direction.

La figure 2, Planche XII, n'est que la reproduction de la figure 1 pour deux points tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cela posé, nous pouvons passer en revue les opérations principales dont la méthode des mouvements de rotation fait un

constant usage; en dehors de ce qui est relatif au mouvement de rotation d'un point unique, que nous avons suffisamment examiné, ces opérations se réduisent à deux, que nous étudierons dans leurs différentes circonstances.

132. I. *Faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Nous supposerons (fig. 3) qu'il s'agit de faire tourner la droite A autour de l'axe vertical, représenté en projection horizontale par le seul point Z^h, qui est le point même en lequel l'axe vient percer le plan horizontal, et qui sera le centre commun des projections des différentes circonférences décrites par les différents points lors de leur rotation; la projection verticale de cet axe est Z^v, perpendiculaire à la ligne de terre; et prolongée, elle passerait par le point Z^h sur l'épure. C'est autour de ce point Z^h que le déplacement angulaire doit être compté, et pour faire tourner la droite d'un angle α, par exemple, il nous suffira de faire tourner du même angle deux de ses points m et n, dont les projections sont (m^h, m^v) (n^h, n^v).

Quand m dans l'espace tourne de l'angle α, m^h tourne du même angle et vient occuper le point m'^h, tellement placé sur la circonférence Δ^h, que $m^h Z^h m'^h = \alpha$; m^v se trouve, ainsi que nous l'avons vu déjà, sur la droite Δ^v, menée parallèlement à la ligne de terre par m^v, et qui est à la fois la projection sur le plan vertical, de tout ce qui est renfermé dans le plan horizontal, qui contient la circonférence Δ décrite par le point m dans l'espace, et qui se projette en vraie grandeur sur Δ^h. La même construction donnera n'^h et n'^v, qui sont les projections de la nouvelle position n' du point n quand il a tourné du même angle α dont a tourné le point m autour du même axe vertical Z.

Après ce mouvement, la droite A, qui joignait les deux points m et n, est devenue A', qui passe par m' et n', et nous en possédons dès à présent les deux projections A'^h et A'^v, car ces projections sont des lignes droites passant respectivement par les projections des deux points.

Remarquons immédiatement que si le sens de la rotation n'était point fixé, il y aurait deux positions du point m' qui satisferaient à cette condition d'avoir tourné d'un angle α à partir du point de départ. Ces deux points se trouveraient en projection horizon-

tale sur la circonférence Δ^h en portant l'angle α soit dans le sens de la flèche f, soit dans le sens de la flèche f_1, ce qui fournirait les deux points m'^h et $m_1'^h$, qui satisferaient également à l'énoncé de la question. Dans le second cas, n^h sera venu en $n_1'^h$ et l'on aura ainsi obtenu une seconde droite A_1', passant par m_1' et n_1', qui satisfera, comme A', à la condition énoncée. Pour que la nouvelle position d'une droite qui tourne autour d'un axe soit complétement déterminée, il ne suffit donc pas de savoir l'angle dont elle doit tourner, mais encore le sens dans lequel la rotation doit s'effectuer; ce sens sera toujours indiqué dans nos épures par une flèche placée de la même manière que nos flèches f et f_1.

Dans l'opération que nous venons d'indiquer, il nous a fallu construire séparément l'angle α à partir du point m^h et du point n^h, ce qui exige qu'avec un rayon arbitraire on décrive une circonférence du sommet r de l'angle donné α comme centre; que l'on fasse la même opération en Z^h, qu'on mesure avec une ouverture de compas la distance st, qu'on prenne sur l'épure $ST = st$ et que l'on joigne Z^h au point T : la droite Z^hT fait alors un angle α avec la droite Z^hS, qui passe par le point m^h. Le rayon rs, avons-nous dit, est arbitraire; mais puisque nous sommes obligés, pour nos constructions ultérieures, de décrire la circonférence Δ^h qui passe par le point m^h, on voit immédiatement que les opérations seront abrégées si l'on prend $rs = Z^h m^h$; et, une fois que par ce moyen on aura trouvé m'^h, on pourra même éviter de faire une opération semblable pour n^h, car en prolongeant à la fois Δ^h et $Z^h n^h$, il suffira que l'arc de la circonférence Δ^h compris entre cette dernière droite et $Z^h n'^h$ soit égal à l'arc compris sur cette même circonférence Δ^h, entre les deux rayons analogues pour le point m.

Cette observation fournit le moyen le plus rapide pour obtenir les nouvelles positions des points que l'on considère après le mouvement effectué; mais il ne faudrait pas en faire un usage trop absolu; si le rayon $Z^h m^h$ se trouvait, dans un cas particulier, trop petit pour que le mesurage de l'arc sur le cercle qu'il décrit ne pût donner toute la précision désirable, il vaudrait mieux mesurer les arcs sur la plus grande circonférence qu'il serait possible de tracer du centre du mouvement, d'après les limites du dessin; la précision sera d'autant plus grande que l'on pourra employer un rayon plus grand.

Dans ce que nous venons de dire, nous avons supposé que les points m et n étaient choisis arbitrairement, et il ne faut pas oublier qu'on peut, lorsqu'il s'agit de faire tourner une droite, les prendre arbitrairement, en cherchant toutefois, autant que le permet la grandeur du papier, à ce qu'ils soient aussi éloignés que possible l'un de l'autre. Une erreur commise dans la position de l'un de ces points ou de tous deux, affectera, en général, d'autant moins la position de la ligne, que les deux points qui servent à la déterminer seront plus distants l'un de l'autre.

Points remarquables.

133. Mais si les indications que nous venons de présenter sont indépendantes de la position des points m et n, rien n'empêche d'employer de préférence ceux qui exigeraient un moindre nombre de constructions. S'il s'agit toujours d'un axe vertical, la trace horizontale présentera cette simplification que la circonférence qu'elle décrit dans l'espace se trouvant contenue dans le plan horizontal de projection, sa projection verticale devra toujours se trouver sur la ligne de terre, ce qui évitera de tracer spécialement la droite Δ^v, qui est, dans le cas général, la projection verticale de cette circonférence. Il faudra s'en servir quand on le pourra pour arriver plus simplement à la détermination des deux projections A'^h et A'^v de la droite A, après le mouvement de rotation; tel est le cas de la figure 4.

Un autre point remarquable est celui pour lequel la circonférence Δ^h est tangente à la projection A^h de la droite A. Dans ce cas le rayon $Z^h m^h$ est perpendiculaire à A^h (fig. 5), et dans les diverses positions qu'elle prend en tournant, la droite A a toujours pour projection horizontale une droite qui est tangente à Δ^h, ce qui permet de déterminer la projection A'^h à l'aide du seul point m', car il suffira de mener en m'^h, auquel est arrivé le point m après la rotation, une tangente A'^h à la circonférence Δ^h. La projection verticale s'en déduira par les moyens ordinaires. Cette circonférence Δ de l'espace, dont Δ^h est la projection horizontale, a elle-même cela de remarquable qu'elle est la plus petite de toutes les circonférences décrites par les divers points de la ligne A; et si l'on se reporte à ce que nous

avons déjà dit de la plus courte distance de deux droites, on voit que le rayon de cette circonférence *minimum* est précisément cette plus courte distance. Nous aurons, en parlant des surfaces courbes, à revenir sur cette propriété.

Cas où la droite A rencontre l'axe.

134. Lorsque cette circonstance se présentera naturellement dans la suite des opérations, ou lorsqu'on pourra choisir la position de l'axe de manière à réaliser cette condition, les constructions seront notablement diminuées; car alors l'un des points de la droite, le point o, par exemple, se trouvant sur l'axe même, ne se déplacera pas dans le mouvement de rotation; les projections o^h et o^v ne se déplaceront pas non plus, et une fois connues, elles fourniront respectivement un point de chacune des projections de la droite A dans l'une quelconque de ses positions.

Or, o (fig. 1, Pl. XIII) étant sur l'axe Z perpendiculaire au plan vertical, sa projection o^h se trouvera nécessairement sur la projection Z^h de la droite Z. Quant à la projection verticale de ce point commun, elle se confond évidemment avec Z^v.

Pour que cette circonstance se présente, il suffit que la projection A^v passe par Z^v, auquel cas la circonférence minimum n'existe plus, et la position des projections de la droite, après la rotation, n'exige plus que de déterminer la position d'un seul point m, le point o étant dans toutes les positions un point commun aux deux droites, dont l'une ne se déplace pas; ses projections invariables o^h et o^v suffiront avec celles d'un point m pour tracer les deux projections de A'.

La construction se réduira le plus possible lorsque l'axe venant à rencontrer la droite, on pourra se servir de sa trace horizontale, ainsi que l'indique la figure 1 de la Planche XIII.

Cas où la droite est parallèle à l'axe.

135. L'axe étant perpendiculaire au plan horizontal de projection, la droite A (fig. 2), qui est parallèle à cet axe, est aussi perpendiculaire à ce même plan. Sa projection sera donc un

point unique, et il suffira de faire tourner ce point A^h d'un angle α pour obtenir la nouvelle projection horizontale A'^h de la droite. Dans les deux positions la projection verticale est une perpendiculaire à la ligne de terre, comme Z^v elle-même.

Cas où l'axe est situé dans l'un des plans de projection.

136. On considère quelquefois, en géométrie descriptive, des axes qui, n'étant perpendiculaires à aucun des plans de projection, sont contenus dans l'un ou l'autre de ces plans. Effectuer une rotation dans ces circonstances, c'est ce que l'on désigne généralement par l'expression de *rabattement;* c'est ainsi que nous avons pu dire qu'en tournant autour de la ligne de terre, considérée comme charnière, pour venir se confondre avec le plan horizontal, le plan vertical se rabat sur le plan de l'épure.

Quoique cette circonstance doive être pour nous exceptionnelle, nous aurons cependant à la considérer quelquefois, mais nous prendrons soin d'en faire à chaque fois l'observation, l'expression de mouvement de rotation ne devant être employée par nous que pour le cas d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection.

137. II. *Faire tourner une droite autour d'un axe de manière à la rendre parallèle à l'un des plans de projection.*

Ce problème fondamental dont nous ferons bientôt une continuelle application n'est, en quelque sorte, qu'un cas particulier de celui qui vient de nous occuper.

Si, en effet, la droite A dans sa nouvelle position A′ est devenue parallèle au plan vertical de projection (et c'est à ce seul plan de projection qu'elle peut devenir parallèle en tournant autour d'un axe vertical), sa projection horizontale A^h dans cette nouvelle position est devenue parallèle à la ligne de terre, condition qui à elle seule est suffisante pour le parallélisme du plan de projection et de la droite.

On conclut de la même manière que précédemment (fig. 3), la position A'^v qui correspond à A'^h, et alors l'angle α dont la droite a tourné, et qui est mesuré par l'angle compris entre les deux projections horizontales A^h et $A^{h\prime}$ se trouve être la conséquence géométrique de la condition de parallélisme.

Observation. Lorsque deux droites, que l'on suppose liées invariablement, tournent simultanément autour d'un axe, si l'une tourne d'un angle α, l'autre tourne nécessairement du même angle et dans le même sens, et la même construction appliquée à chacune des droites prises isolément suffit à la détermination de leurs nouvelles positions.

Lorsque au contraire l'angle α n'étant pas donné, il s'agit de rendre l'une des droites parallèles au plan vertical, c'est ainsi que nous l'avons vu l'épure même qui donne la valeur de l'angle α dont il faut faire tourner le système, et c'est cet angle α, ainsi déterminé, qui sert à effectuer la rotation de la seconde droite.

138. III. *Une droite* A *parallèle à l'un des plans de projection étant donnée, amener, par un mouvement de rotation, cette droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Si nous supposons que cette droite A est parallèle au plan vertical, il est évident qu'elle ne pourra, en tournant autour d'un axe vertical, devenir perpendiculaire au plan horizontal; car ce mouvement ne saurait changer l'angle constant qu'elle fera dans ses diverses positions avec le plan horizontal. Elle ne pourra non plus devenir perpendiculaire au plan vertical, car il faudrait pour cela que l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal pût devenir nul.

Il n'en est plus de même si l'on considère un axe perpendiculaire au plan vertical, car alors la droite parallèle à ce plan, dans sa position primitive, lui restera encore parallèle dans toutes ses autres positions; en parcourant dans ce mouvement un plan parallèle au plan vertical, elle prendra toutes les inclinaisons possibles par rapport au plan horizontal, et dans une de ces positions, elle lui sera perpendiculaire.

A^h et A^v (fig. 4) sont les deux projections de la droite, Y^h et Y^v celles de l'axe; chaque point de la droite décrira, pendant son mouvement autour de l'axe Y, une circonférence Δ qui se projettera en Δ^h et en Δ^v, Δ^h se confondant dans toutes ses positions avec A^h; et si, comme nous l'avons vu, on considère plus particulièrement le point n dont la projection n^h se trouve sur la circonférence Y^v, tangente à A^v, puisque la droite A^v devra toujours être tangente à cette circonférence, il suffira de cher-

cher la position dans laquelle cette tangente sera perpendiculaire à la ligne de terre pour avoir amené à la position voulue la droite A; alors cette droite n'a plus pour projection horizontale que le seul point A'^h, obtenu en mettant le point n' en projection horizontale sur Y^h ou A^h.

A'^h se réduit alors à un point qui se confond avec n'^h.

139. IV. *Une droite* A *située d'une manière quelconque dans l'espace étant donnée, amener par des mouvements de rotation cette droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

La figure 5 fera comprendre comment la droite A, étant d'abord devenue parallèle au plan vertical par un mouvement effectué autour de l'axe vertical Z, a pu être amenée en A″ à être perpendiculaire au plan horizontal.

Cette figure n'est, en quelque sorte, que la superposition des deux figures précédentes; LT est la ligne de terre unique qui définit les deux seuls plans de projection H et V l'un par rapport à l'autre. Le premier axe de rotation est la verticale Z qui permet d'amener la droite A en A′ parallèlement au plan vertical.

Y est un second axe, perpendiculaire au plan vertical, à l'aide duquel cette même droite est amenée à la position A″ perpendiculairement au plan horizontal. Sa projection horizontale est alors réduite au seul point A''^h.

Quelle que soit la position d'une droite A dans l'espace, on peut toujours, au moyen de deux mouvements de rotation successifs, amener cette droite à être perpendiculaire à l'un quelconque des plans de projection.

Pour ne pas multiplier inutilement les constructions on choisit ordinairement, pour axes successifs, les lignes projetantes d'un des points de la droite, ou, tout au moins, les lignes projetantes d'un point quelconque de l'espace; Z^v et Y^h sont alors, dans le dessin, sur une seule et même droite perpendiculaire à la ligne de terre et passant par les points Z^h et Y^v.

La figure 6 fait voir comment ce choix simplifie les constructions, que l'on aurait pu diminuer encore en faisant passer les deux axes par un même point de la droite A qui aurait, par suite de ce choix particulier, appartenu aussi aux droites A′ et A″.

140. V. ***Faire tourner un plan d'un angle α autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection.***

Ainsi que nous avons eu l'occasion de le remarquer fréquemment, un plan est déterminé de position lorsqu'on connaît trois de ses points, ou, ce qui est la même chose, deux droites qu'il contient. Lorsqu'il s'agit de faire tourner un plan d'une certaine quantité *angulaire* α, il suffirait donc, pour résoudre le problème, d'opérer de la manière suivante : choisir arbitrairement deux droites M et N dans le plan donné P (P. XIV, fig. 1); faire tourner chacune de ces droites d'un même angle α; faire passer un plan P′ par M′ et N′, nouvelles positions de M et de N. Ce plan P′ sera le plan cherché.

Mais, en géométrie descriptive, un plan est donné par ses traces, et nous savons déterminer à l'aide de ces traces les projections d'autant de points que nous voudrons ; nous donnant arbitrairement la projection m^h d'un point de ce plan (nous savons qu'en général les projections des points d'un plan couvrent dans toute leur étendue les deux plans de projection) pour avoir sa projection verticale, nous considérerons une horizontale A contenue dans ce plan ; sa projection horizontale A^h passe par le point m^h, et est parallèle à la trace horizontale HP du plan, car toutes les horizontales du plan sont parallèles entre elles, et par conséquent à la trace HP, qui est elle-même celle de ces horizontales qui se trouve contenue dans le plan horizontal de projection.

Connaissant A^h rien n'est plus facile que de déterminer A^v : car A étant horizontale, sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre, et sa trace verticale devant être sur la trace verticale du plan P qui la contient, se trouve nécessairement en a^v; dès lors on connaît la projection verticale A^h en menant par ce point, qui en fait partie, la parallèle A^v à la ligne de terre, et le point du plan dont m^h est la projection horizontale a pour seconde projection m^v construit par la rencontre de A^v et de la perpendiculaire abaissée par m^h sur la ligne de terre.

En nous procurant ainsi trois points du plan et les faisant tourner simultanément d'un angle α autour de l'axe vertical Z, nous obtiendrons trois nouveaux points m', n', o', et le problème sera ramené à celui-ci que nous savons résoudre : faire passer un plan par trois points donnés.

Toutes les opérations que nous venons de décrire ont été effectuées dans la figure 1, dans laquelle M' et O' sont les droites auxiliaires passant respectivement par les points choisis, dont on fait usage pour déterminer trois points des traces du plan P', nouvelle position du plan P. C'est là le procédé général; mais il arrive rarement que l'on y ait recours; la seule difficulté qu'il présente consiste dans le choix des points arbitraires, de manière qu'aucune des constructions ne sorte du papier, et qu'ils soient cependant aussi éloignés que possible les uns des autres pour obtenir dans le tracé graphique toute la précision désirable. Ce choix exige quelque habitude, et les élèves feront bien de s'y exercer, en opérant avec différentes données sur un très-grand nombre de points de chaque plan.

Voici d'ailleurs les simplifications que ce procédé comporte dans le plus grand nombre des cas.

Points remarquables.

141. *a.* La trace horizontale HP du plan P peut servir, comme toute autre droite de ce plan, à la solution que nous cherchons; elle a même cela de remarquable que tous les points qui sont contenus dans le plan horizontal n'en sortiront pas pendant le mouvement de rotation. Elle sera donc, après ce mouvement, et dans le plan horizontal et dans le nouveau plan P'; elle sera donc la trace horizontale de ce nouveau plan, ce que nous exprimerons en disant que *la trace d'un plan sur un plan perpendiculaire à un axe de rotation autour duquel ce plan tourne, reste sa trace dans toutes les positions du plan mobile.*

Dans notre épure (fig. 2) la trace horizontale du nouveau plan sera donc immédiatement déterminée en faisant tourner d'un angle α l'ancienne trace horizontale HP de ce plan, opération que nous savons effectuer soit à l'aide de deux points de ce plan, soit à l'aide de la circonférence tangente, celle-ci devant d'autant mieux s'employer ici qu'il n'y a pas de projection verticale à chercher pour la droite HP; nous n'avons pas besoin de dire que cette projection verticale est la ligne de terre elle-même.

La trace horizontale étant connue, il suffit de considérer deux

horizontales du plan pour avoir, par leurs traces respectives, deux points de la trace verticale cherchée.

Lorsque, comme sur le dessin, la trace horizontale HP′ viendra rencontrer la ligne de terre sur le papier, le point de rencontre sera déjà un point de la trace verticale, et il suffira de considérer une seule horizontale du plan P′ pour connaître, par sa trace verticale a'_0, la trace même du plan P′; c'est ce que l'on a fait en VP′ à l'aide de l'horizontale A′.

142. *b. Le plan donné est rencontré par l'axe dans les limites du dessin.* L'axe Z étant tout entier projeté horizontalement sur le seul point Z^h, si cet axe rencontre le plan P (fig. 3), la projection horizontale de ce point de rencontre m sera aussi en Z^h; et, pour avoir sa projection verticale, il faut encore considérer l'horizontale A du plan P, dont la projection horizontale A^h passe par Z^h; puisque cette horizontale est dans le plan P sa trace a_0 se trouvera sur la trace VP du plan, et s'obtiendra en mettant a^h en projection verticale sur cette trace, et la projection m^v du point m se trouvera à l'intersection de A^v et de Z^v.

Lorsque m^v sera dans les limites du dessin, il conviendra de se servir du point m pour construire la trace VP′ du plan P après la rotation; car le point m étant sur l'axe même ne se déplacera pas dans ce mouvement, et il restera un des points du plan dans toutes ses positions; connaissant m^h et m^v, rien n'est plus facile que de construire l'horizontale A'^h, A'^v du plan P′ après la rotation; A'^h est parallèle à HP′, A'^v se confond avec A^v, et la trace a'_0 de cette droite est un des points de la trace cherchée, qui se trouve par conséquent connue en joignant le point p au point a'_0.

Nous mettrons souvent à profit la simplification que cette circonstance présente.

143. *c. Le plan donné est parallèle à l'axe.* Si le plan donné est parallèle à l'axe, que nous supposons toujours perpendiculaire au plan horizontal, il aura évidemment, pour trace verticale, une perpendiculaire à la ligne de terre, condition que nous avons reconnu être nécessaire et suffisante pour qu'un plan soit perpendiculaire au plan horizontal. Les traces

du plan P dans ce cas particulier seront donc telles que HP et VP (fig. 4); et de quelque grandeur que soit le déplacement angulaire imprimé au plan P, sa trace verticale VP′, après ce mouvement effectué, devra encore satisfaire à la même condition.

Ayant donc déterminé HP′ au moyen d'un déplacement angulaire α mesuré sur la circonférence tangente, il suffira de mener par le point p, en lequel cette trace horizontale vient rencontrer la ligne de terre, la perpendiculaire VP′ à LT.

144 *d. Le plan donné est perpendiculaire au plan de projection auquel l'axe est parallèle.* Le plan P (fig. 5) est perpendiculaire au plan vertical de projection, tandis que l'axe vertical Z est parallèle à ce même plan vertical.

De ce que le plan P est perpendiculaire au plan vertical, il s'ensuit que l'horizontale de ce plan, que nous mènerons par le point de ce plan qui se projette en Z^h, sera elle-même une perpendiculaire au plan vertical, et qu'elle se projettera verticalement sur le point unique A^v de rencontre de VP et Z^v. Connaissant ainsi les projections m^h et m^v du point de rencontre, nous pourrons, après avoir amené la trace horizontale HP en HP′ par un mouvement de rotation, construire l'horizontale A′ du nouveau plan P′ au point m; ses projections seront respectivement A'^h et A'^v. Sa trace verticale A'^v sera un des points de la trace verticale VP′ du plan cherché.

145. *e. Cas où l'axe est situé dans l'un des plans de projection.* Si le plan donné doit tourner autour d'un axe contenu dans l'un des plans de projection, on dit qu'il y a rabattement autour de cet axe, cette expression étant, comme nous l'avons vu, réservée à cette situation exceptionnelle de l'axe de rotation.

On n'a occasion d'effectuer cette opération en géométrie descriptive que pour faire tourner un plan autour de l'une de ses traces.

146. VI. *Faire tourner un plan autour d'un axe de manière à le rendre perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Cette opération, que nous aurons très-fréquemment à effectuer dans les problèmes qui vont suivre et que l'on peut toujours faire, quelle que soit la position du plan donné, ne diffère de la précédente qu'en ce que la trace horizontale doit devenir perpendiculaire à la ligne de terre: il suffira de mener, à la circonférence tangente à la première position de la trace horizontale du plan, une tangente perpendiculaire à cette ligne de terre. La trace verticale sera ensuite déterminée comme précédemment. Tout plan, en effet, dont la trace occupe cette position est perpendiculaire au plan vertical, et s'il s'agissait de le rendre perpendiculaire au plan horizontal, ce serait d'un axe horizontal qu'il faudrait se servir. Cette construction se trouve réalisée pour le plan P, Planche XV, fig. 1.

Observation. L'angle dont a tourné le plan dans ce cas n'est point connu à priori, mais déterminé par la construction même; et si, comme nous aurons à le voir par la suite, ce plan fait partie d'un système de plusieurs éléments géométriques qui doivent tourner ensemble, c'est de cet angle α ainsi obtenu que devront tourner toutes les autres lignes et tous les autres plans qui constituent ce système.

147. VII. *Un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection étant donné, faire tourner ce plan de manière qu'il devienne parallèle à l'autre plan de projection.*

Si le plan P, perpendiculaire au plan vertical, par exemple, vient à tourner autour d'un axe perpendiculaire aussi à ce même plan, il est évident qu'il formera un angle toujours égal avec ce plan vertical, et que, par conséquent, il lui sera, dans toutes ses positions, perpendiculaire.

Il serait donc impossible de l'amener ainsi à être parallèle au plan vertical, mais il n'en est pas de même à l'égard du plan horizontal. Pour que cette circonstance se réalise, nous savons en effet qu'il suffit que, sans cesser d'être perpendiculaire au plan vertical, le plan ait, pour trace verticale, une parallèle à la ligne de terre; il n'a même dans cette position qu'une seule trace que l'on obtient encore en considérant la circonférence Y tangente à VP et en menant à cette circonférence la tangente VP parallèle, à la ligne de terre, ainsi qu'on peut le voir fig. 2.

Le plan P′ en effet, qui n'a que la seule trace VP′, s'il retournait en sens contraire d'un angle α, viendrait occuper la position primitive du plan P, et il est d'ailleurs dans la position P comme dans la position P′, perpendiculaire au plan vertical, sa rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan n'ayant pu changer cette relation de position.

148. VIII. *Un plan* P *situé d'une manière quelconque dans l'espace, étant donné, amener, par des mouvements de rotation, ce plan à être perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

La figure 3 n'est, pour ainsi dire, que la superposition des deux figures précédentes. Le plan P, situé d'une manière quelconque, est d'abord amené à être perpendiculaire au plan vertical en tournant autour de l'axe Z perpendiculaire au plan horizontal; il occupe alors la position P′ et ses deux traces sont HP′ et VP′, HP′ étant perpendiculaire à la ligne de terre.

Arrivé dans cette position, nous avons appris (147) comment on pouvait l'amener à être parallèle au plan horizontal, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical; et sa trace horizontale a disparu dans sa nouvelle position P″, sa trace verticale HP″ étant devenue parallèle à la ligne de terre.

Quelle que soit donc la position d'un plan dans l'espace, on peut toujours, par deux mouvements de rotation autour d'axes perpendiculaires aux plans de projection, l'amener à être parallèle à l'un des plans de projection; et, pour arriver à ce résultat, il faut employer successivement deux axes respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection; si le premier axe est perpendiculaire au plan vertical, le second devra être perpendiculaire au plan horizontal, et la nécessité de cette alternance rappelle que les opérations de changements de plan doivent aussi être exécutées de la même manière.

Nous verrons que, dans certains cas, il est nécessaire d'avoir recours à un troisième mouvement de rotation, comme à un troisième changement de plan, et que la même règle doit encore être appliquée dans le choix du troisième axe ou du troisième plan.

Pour ne pas multiplier inutilement les constructions, on choisit ordinairement, pour axes successifs, les lignes projetantes

d'un des points du plan, ou tout au moins les lignes projetantes d'un même point de l'espace ; Z^v et Y^h sont alors dans le dessin sur une seule et même droite perpendiculaire à la ligne de terre, et passant par les points Z^h et Y^v. La figure 4 fait voir comment ce choix simplifie les constructions que l'on aurait pu diminuer encore en faisant passer les deux axes par un même point du plan P.

EXPOSÉ SUCCINCT DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE DES MOUVEMENTS DE ROTATION.

149. Nous avons vu déjà, dans les applications de la méthode des changements de plan, que les problèmes ordinaires qui se présentent sur le point, la ligne droite et le plan sont tels que, dans certaines positions déterminées des plans de projection par rapport aux données du problème, la solution se trouve écrite sur l'épure même ; et cette méthode consiste à ramener le cas général à ces cas particuliers par de seuls changements de plans de projection, les données restant invariables dans l'espace.

La méthode des mouvements de rotation atteint le même but tout en ne considérant pas de nouveaux plans de projection, mais en faisant tourner le système invariable des données de la question autour de certains axes convenablement choisis pour que quelques-unes de ces données, en tournant, viennent occuper ces positions remarquables par rapport aux plans de projection.

S'agit-il d'une longueur à mesurer sur une droite, il faut amener cette droite à être parallèle à l'un des plans de projection, pour qu'elle s'y projette en vraie grandeur.

S'agit-il d'une perpendiculaire à abaisser sur une droite ou sur un plan, il faut amener le système du point donné, et de la droite ou du plan en une position telle que cette perpendiculaire se projette aussi en vraie grandeur, et en faisant un angle droit avec la ligne qui représente, sur le même plan, soit la droite, soit le plan donné.

S'agit-il enfin de mesurer un angle plan, il faut que le plan de cet angle soit amené à être parallèle à l'un des plans de projection.

Toutes ces opérations peuvent s'effectuer par des mouvements de rotation. Nous venons d'apprendre à rendre une droite parallèle au plan vertical, ou un plan perpendiculaire à ce même plan vertical, en les faisant tourner autour d'un axe vertical; ce sont là les seules opérations que l'on puisse effectuer à l'aide d'un seul axe; mais, une fois amenée dans cette première position remarquable, une droite peut être rendue perpendiculaire au plan horizontal en tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical; et, en tournant autour d'un pareil axe, un plan déjà perpendiculaire au plan vertical peut devenir parallèle au plan horizontal de projection.

Enfin, lorsqu'un plan est arrivé dans cette position de parallélisme au plan horizontal, et qu'il n'a plus par conséquent qu'une seule trace, sa trace verticale, qui est en même temps la projection verticale de tout ce qui est contenu dans ce plan, cette trace unique ne changera pas si on fait tourner le plan autour d'un autre axe vertical; et l'on voit que l'on peut encore profiter de ce troisième mouvement de rotation, de manière à amener une des autres données géométriques du problème à occuper une des positions principales que nous venons de définir.

Tels sont les seuls mouvements qu'il faut savoir faire effectuer aux droites et aux plans pour résoudre tous les problèmes simples de la géométrie descriptive, en passant absolument par les mêmes phases que dans l'emploi de la méthode des changements de plan.

Ces opérations multiples ne présenteront à l'esprit attentif aucune difficulté si l'on a soin d'appliquer la notation convenue à chaque ligne que l'on tracera; mais si, dans les commencements, on craint de s'égarer au milieu de ces lignes nombreuses, rien n'empêche, après chaque mouvement de rotation effectué, de reporter sur un nouveau dessin les seuls résultats de cette opération, et de les considérer comme les données d'un nouveau problème qui se résoudra par les mêmes moyens. Nous avons eu soin de fournir des exemples de cette manière d'opérer qui pourra faciliter beaucoup les commençants, mais qu'il faut se hâter d'abandonner lorsqu'elle n'est plus indispensable comme guide.

A chaque problème, nous aurons à nous poser la question suivante :

Quelle est, par rapport aux plans de projection, la position des données du problème pour laquelle la solution se trouverait écrite par la représentation même des données, ou par une construction simple effectuée sur l'un des plans de projection?

A cette question, la réponse sera identiquement la même que pour chaque problème analogue résolu par la méthode des changements de plan, à tel point que nous pourrons nous borner à transcrire la réponse à laquelle nous sommes chaque fois parvenu en exposant cette méthode.

Restera ensuite à déterminer par quels mouvements de rotation, imprimés aux données du problème, cette circonstance pourra être reproduite, et à cet égard les indications qui suivent ne seront pas inutiles.

A l'aide d'un seul mouvement de rotation, une droite peut être amenée à être parallèle à l'un des plans de projection. Il en faut deux pour la rendre perpendiculaire.

A l'aide d'un seul mouvement de rotation, un plan peut être rendu perpendiculaire à l'un des plans de projection. Il en faut deux pour le rendre parallèle.

Deux droites déterminant un plan, la condition de rendre ces deux droites parallèles à la fois à un plan de projection exige également deux mouvements de rotation ; et, si l'on ne veut construire le plan de ces deux droites, ce qui quelquefois est impossible, il en faudra employer trois.

Deux plans peuvent être rendus perpendiculaires à un même plan de projection par deux mouvements de rotation seulement, mais alors il faut construire la commune intersection, ce qui n'est pas toujours facile. Mais avec trois mouvements de rotation on peut toujours arriver à la position que l'on désire.

Enfin, pour rendre un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection et une droite parallèle à ce même plan, il faut aussi se servir de trois mouvements de rotation successifs.

Et de même que, dans les changements de plans, on fait cette opération successivement en changeant alternativement de plan vertical et de plan horizontal, de même dans les applications que nous allons faire des mouvements de rotation, nous nous servirons alternativement d'axes perpendiculaires au plan vertical et au plan horizontal. Nous reproduirons d'ailleurs ce rapprochement après avoir rapidement exposé les épures relatives

aux problèmes que nous avons déjà résolus une première fois; et nous ferons observer, une fois pour toutes, que l'on pourrait, dans chacun, commencer par un axe perpendiculaire au plan vertical ou par un axe perpendiculaire au plan horizontal de projection. Tout ce qui sera dit de l'un de ces axes par rapport au plan qui lui est perpendiculaire, pourra être dit également de l'autre position de l'axe par rapport à l'autre plan de projection. Nous dirons, dans chaque cas, quelle est la position la plus convenable pour les axes autour desquels s'effectueront les rotations.

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES DE POSITION RELATIVE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN, PAR LA MÉTHODE DES MOUVEMENTS DE ROTATION.

PROBLÈME I. *Trouver la distance entre deux points* m *et* n.

150. SOLUTION. Pour que la vraie grandeur de cette distance fût immédiatement donnée sur le plan vertical, que faudrait-il? Évidemment que la droite qui passe par les deux points donnés fût parallèle à ce plan vertical.

Nous savons qu'avec un seul mouvement de rotation autour d'un axe vertical nous pouvons amener la droite qui joint les deux points à occuper cette position. Donc, il suffit pour résoudre le problème de prendre un pareil axe, de faire tourner la droite jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan vertical, ou, ce qui revient au même, jusqu'à ce que sa projection horizontale soit parallèle à la ligne de terre. Dans ce mouvement m est devenu m', n est devenu n', la longueur invariable mn est venue se placer en $m'n'$, dont on a la mesure par la distance $m'^v\,n'^v$ des deux projections verticales des deux points, puisque la droite qui les joint est maintenant parallèle au plan de projection sur lequel nous opérons. (Voy. pl. XVII, fig. 1.)

151. ÉPURE. Les deux points étant donnés par leurs projections, on peut toujours prendre pour axe la verticale qui passe par l'un d'eux, le point m par exemple, et faire tourner autour de cet axe le point n d'une quantité angulaire telle que sa nouvelle projection n'^h vienne se placer sur la parallèle même à la ligne de terre menée par le point m^h qui ne change pas de position parce qu'il est sur l'axe.

La circonférence décrite par le point n dans l'espace a pour projection Δ^h et Δ^v, et n'^h se trouvant à la rencontre de Δ^h avec $m^h n'^h$, on connaît immédiatement n'^h dont la projection

verticale n'^v s'obtient aussitôt par la perpendiculaire $n'^h n'^v$ à la ligne de terre.

La nouvelle position de la droite dans l'espace est alors représentée sur les plans de projection par A'^h et A'^v, et $m^v n'^v$ donne la longueur cherchée.

L'épure de la figure 2 n'est que la reproduction du même mode de solution pour d'autres données, et en effectuant la rotation autour d'un axe Y perpendiculaire au plan vertical.

PROBLÈME II. *Trouver la distance d'un point à un plan.*

152. SOLUTION. Si le plan était perpendiculaire au plan vertical, la normale au plan, qui passe par le point et qui mesure la distance cherchée, serait parallèle au plan vertical de projection, et par conséquent elle se projetterait en vraie grandeur. D'ailleurs la projection verticale de cette normale est toujours perpendiculaire à la trace verticale du plan qui, dans ce cas particulier, est elle-même la ligne suivant laquelle se projette tout ce qui est contenu dans ce plan.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier il faut :

Prendre un axe vertical quelconque.

Faire tourner le plan donné autour de cet axe, jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire au plan vertical.

Chercher la projection verticale du point après cette rotation. La longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la nouvelle trace verticale du plan sera la longueur cherchée. (Voy. pl. XIX, fig. 1.)

ÉPURE. On a pris pour axe la verticale qui passe par le point m; ce point alors ne se mouvra pas quand on fera tourner le plan, et il sera toujours représenté par ses mêmes projections m^h et m^v.

La nouvelle trace horizontale HP′ doit être perpendiculaire à la ligne de terre, et je l'obtiens au moyen de la circonférence tangente Δ^h, à laquelle il suffit de mener la tangente HP′ perpendiculaire à la ligne de terre. Le plan A tourne alors d'un angle α, que je ne connaissais pas à priori; et pour obtenir la trace verticale VP′ de ce plan après la rotation, il suffira d'avoir déterminé,

à l'aide de l'horizontale qui passe par le point m, la projection verticale b^v du point immobile en lequel l'axe de rotation vient percer le plan dans sa première position; ob^v sera la trace verticale cherchée.

La normale est projetée verticalement sur la perpendiculaire $m^v n'^v$ abaissée par le point m sur VP'; $m^v n'^v$ est la longueur cherchée. Quant à la projection horizontale de cette normale, c'est la parallèle $m^h n'^h$ menée par m^h à la ligne de terre.

Retour à la position primitive. En soumettant tout le système du point, du plan et de la normale à une rotation en sens inverse autour du même axe et du même angle α, que nous avons appris à connaître, le plan P' redeviendra le plan P, m ne variera pas, n' deviendra le point n, dont la projection horizontale n^h s'obtient par la circonférence Y^h; et en rapportant ce point n^h à sa position primitive, nous connaîtrons le pied n de la normale par ses projections n^h et n^v, et nous aurons les deux projections de cette normale dans la position primitive en joignant m^h à n^h, et m^v à n^v.

La figure 2 n'est que la reproduction des mêmes opérations sur des données différentes.

Vérifications. Le point n est un point du plan P, ce que l'on peut vérifier en considérant une horizontale de ce plan, dont la projection passerait par n^h, et en s'assurant que la projection verticale de cette horizontale se confond avec $n^v n'^v$.

La droite mn étant perpendiculaire au plan P, ses projections $m^h n^h$, $m^v n^v$, doivent être perpendiculaires respectivement aux traces du plan, ce qui donne encore deux nouveaux moyens de vérification. Ceux-ci sont même les plus commodes en ce que leur examen n'exige que le seul déplacement d'une équerre.

Problème III. *Trouver la distance d'un point* m *à une droite* A.

153. Solution. La position spéciale qu'il faut obtenir est évidemment celle dans laquelle la droite A serait perpendiculaire au plan vertical, par exemple. Alors, en effet, la droite inconnue B qui mesure la distance du point à la droite sera

nécessairement parallèle à ce plan vertical et s'y projettera en vraie grandeur.

Mais une droite ne peut, en général, être rendue perpendiculaire au plan vertical que par deux mouvements de rotation, l'un autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, qui peut l'amener à être parallèle au plan horizontal, le second autour d'un axe horizontal, qui peut réaliser la condition cherchée.

Suivre le point et le plan dans ces déplacements successifs est donc tout ce qu'il faut savoir faire pour résoudre le problème; mais, comme nous n'avons pas encore rencontré sur la même figure ces deux mouvements successifs, nous entrerons sur l'épure dans quelques détails. (Voy. pl. XXI, fig. 1.)

154. Épure. 1° Faire tourner la droite A et le point m autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce que cette droite vienne occuper une position A′ parallèle au plan horizontal. Prenons pour axe la droite qui projette sur le plan vertical le point a de la droite A, car alors ce point se trouvant sur l'axe restera immobile, et les constructions seront moins nombreuses.

Lorsqu'une droite est parallèle au plan horizontal, sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre; il faut donc faire tourner la projection verticale A^v autour du point a^v, qui est à la fois la projection et la trace de l'axe sur le plan vertical, jusqu'à ce que A^v devienne parallèle à la ligne de terre en A'^v.

Remarquons que, pour arriver à cette position, cette droite a tourné de l'angle α dont la figure même nous donne la mesure; nous aurons ultérieurement à nous servir de cet angle. A'^v étant connu, l'épure seule pourra indiquer comment A'^h a été obtenu à l'aide du point n qui est venu en n'. On se procurera de la même manière m'^v et m'^h, en faisant tourner le point m du même angle α.

Les données sont actuellement (m'^h, m'^v) (A'^h, A'^v), cette droite étant parallèle au plan horizontal, et c'est sur ces seules données que nous devons effectuer la suite des opérations.

2° Faire tourner la droite A′ autour d'un axe vertical jusqu'à ce que cette droite vienne occuper une position A″ perpendiculaire au plan vertical.

Le point a étant donné par ses projections, prenons pour

axe vertical la droite qui projette ce point sur le plan horizontal; à l'aide d'un tel choix, ce point, et par conséquent ses projections, n'éprouveront aucun changement de position pendant les rotations, et les constructions seront par cela même plus simples.

Lorsqu'une droite est perpendiculaire au plan vertical, sa projection horizontale est perpendiculaire à la ligne de terre. Il faut donc faire tourner la projection horizontale A'^h autour du point a^h, qui est à la fois la projection et la trace de l'axe sur le plan horizontal, jusqu'à ce que A'^h devienne perpendiculaire à LT; cette position est en A''^h, et remarquons qu'alors la droite A' aura tourné d'un angle β dont la figure nous apprend la grandeur, et dont nous aurons à nous servir ultérieurement; A''^h étant connu, nous connaissons immédiatement A''^v qui se réduit à un point unique situé sur A'^v, car dans le nouveau mouvement de rotation la droite A' n'est pas sortie du plan horizontal qui la contenait, et dont A'^v peut être à la fois considérée comme la trace et comme la projection. On se procurera de la même manière m''^h et m''^v.

Les données primitives sont maintenant devenues (m''^h,m''^v) (A''^h,A''^v) et le problème se résout de lui-même, car toute droite qui ira de m à A se projettera verticalement suivant $m''^v A''^v$; et, parmi toutes les droites que l'on peut ainsi mener de ce point à cette ligne, il en est une, et c'est précisément la normale que nous avons à considérer qui, étant parallèle au plan vertical, s'y projette en vraie grandeur.

Le problème est donc résolu, et $m''^v A''^v$ est la longueur cherchée.

155. Retour a la position primitive. Le problème qui s'énonce généralement ainsi : par un point donné mener une droite perpendiculaire à une droite donnée, et construire les projections du point de rencontre des deux droites, se trouve en partie résolu par la construction qui précède, en ce que nous connaissons déjà la longueur de cette perpendiculaire; nous avons même en $m''^v A''^v$, la projection B''^v de cette perpendiculaire, lorsque le système a éprouvé les deux rotations que nous venons d'effectuer. En partant de ces données, rien n'est plus facile que de trouver les projections B^h et B^v, de la

position qu'elle occupera lorsque, tournant en sens contraire avec tout le système du point et de la droite, ceux-ci seront revenus à leur position primitive.

La construction de ces projections B^h et B^v complétera la solution du problème complexe que nous venons d'énoncer : nous n'aurons pour cela qu'à faire tourner la droite B'' d'un angle β autour de l'axe vertical, et en sens inverse de la rotation déjà opérée autour de cet axe; cette première opération nous donnera une droite B' que nous ferons ensuite tourner de α autour de notre axe horizontal. Par ces deux mouvements rétrogrades imprimés au système tout entier, la droite A'' sera revenue en A, les projections de B seront les projections de la perpendiculaire abaissée du point fixe m sur cette droite donnée, et n'' que nous connaissons par sa projection verticale n''^v se retrouvera en n sur cette droite.

Ce retour à la première position se suit facilement sur l'épure, nous ne ferons qu'en énoncer la marche ; $m''^h n''^h$ est parallèle à la ligne de terre comme projection horizontale de la normale qui est, ainsi que nous l'avons vu, parallèle au plan vertical ; n''^h tourne d'un angle β en sens inverse de la flèche qui est figurée sur le plan horizontal, n''^h vient donc en n'^h dont la projection verticale est n'^v sur A'^v; n'^v, à son tour, tournant autour de l'axe horizontal d'un angle α en sens contraire de la flèche qui est figurée sur le plan vertical, vient se placer en n^v, dont la projection horizontale se trouve en n^h sur la projection A^h de la droite A.

Une vérification se présente en ce que n'^h et n'^v étant les deux projections d'un même point p de l'espace lorsqu'il tourne autour d'un axe vertical, ces deux projections doivent se trouver sur une même parallèle à LT, ce dont il est facile de s'assurer avec une équerre.

La figure 2 montre une autre disposition de l'épure pour de très-légères différences dans la position des données.

Problème IV. *Construire la plus courte distance de deux droites* A *et* B.

156. Solution. Nous avons vu, en résolvant ce problème par la méthode des changements de plan, que la position

spéciale qu'il était nécessaire d'obtenir, consistait en ce que l'une des droites devait être perpendiculaire à l'un des plans de projection. Quelle que soit la position qu'occupe alors l'autre droite, la plus courte distance est mesurée par la perpendiculaire qui est abaissée du point unique, qui est l'une des projections de la droite A, sur la projection correspondante de la droite B. Cette position spéciale est encore celle qu'il nous faut obtenir par des mouvements de rotation, et c'est déjà ce que nous venons de faire dans le problème précédent, par deux rotations successives autour de deux axes respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection.

La plus courte distance se trouvera ensuite, comme dans la méthode des changements de plan. (Voy. pl. XXIII.)

157. Épure. Afin qu'elle soit d'une lecture plus facile, choisissons, pour nos deux axes, les deux lignes projetantes d'un certain point m de la droite B, encore bien que les constructions seraient un peu plus simples si nous faisions passer ces axes par un certain point de la droite A, que nous voulons amener à être perpendiculaire au plan horizontal par exemple.

m étant le point choisi sur B, notre premier axe sera la droite projetante de m sur le plan horizontal, et le second, la droite projetante de m sur le plan vertical. m^h sera la projection du premier sur le plan horizontal, et le point m^v la projection verticale du second, et ces points seront respectivement les centres des projections des circonférences décrites dans l'espace par les différents points de la droite A et par les différents points de la droite B.

Notre première opération aura pour but de tourner autour de l'axe vertical Z projeté en m^h, de manière à faire prendre à A une position telle que A'^h soit parallèle à la ligne de terre LT, ce que nous effectuons à l'aide d'une circonférence tangente sur laquelle nous pouvons mesurer l'angle α de cette première rotation effectuée dans le sens de la flèche figurée sur le plan horizontal. A'^h est alors connu, et A'^v s'ensuit immédiatement en déterminant les nouvelles positions de deux points de cette droite.

Le système des deux droites A et B étant invariable, l'une n'a pu tourner sans l'autre, B a tourné du même angle α autour de

l'axe Z projeté en m^h, considération qui suffit pour tracer sa nouvelle projection B'^h qui passe par le point m^h, m étant un point de cette droite qui ne change de position pendant aucun des mouvements de rotation. La projection verticale B'^v passe par m^v pour la même raison, et l'épure indique d'elle-même comment a été déterminé un deuxième point de cette projection.

Le système des deux droites primitives étant maintenant (A'^h, A'^v) (B'^h, B'^v) et l'une d'elles étant parallèle au plan vertical, nous pouvons par un nouveau mouvement de rotation autour d'un axe Y perpendiculaire au plan vertical, l'amener à être perpendiculaire au plan horizontal. Sa projection verticale est alors A''^v, et sa projection horizontale A''^h se réduit à un point placé sur A'^h. Pour venir dans cette nouvelle position, cette droite a tourné d'un angle β donné par la construction même autour de l'axe Y, et c'est du même angle et dans le même sens que nous avons à entraîner dans son mouvement la droite B', qui ne cesse pas de passer par le point m. Inclinons B'^v dans le sens de la flèche, d'une quantité angulaire égale à cet angle β, et nous aurons B''^v pour la projection verticale, dont nous nous servirons ensuite pour construire B''^h qui passe par m^h.

La plus courte distance cherchée est alors mesurée par la perpendiculaire $A''^h n''^h$ abaissée du point A''^h, projection horizontale de A'', sur B''^h projection horizontale de B''.

En outre, cette plus courte distance que nous appellerons C dans l'espace et qui se projette ici en vraie grandeur, se trouvant perpendiculaire à une verticale, est elle-même horizontale : par conséquent sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre : n'' est le point où elle rencontre la droite B'' et nous appellerons l'' son point de rencontre avec A''; ce point, projeté comme tous les autres points de A'' sur le point unique A''^h, aura pour projection verticale l''^v, que l'on obtiendra en menant par n''^v rapporté sur B''^v, la parallèle $n''^v l''^v$ à la ligne de terre.

La plus courte distance C'' est alors représentée par ses deux projections ainsi déterminées ($n''^h A''^h$, $n''^v l''^v$).

158. Retour a la position primitive. Mais ces projections sont celles de la droite C'', qui n'est autre chose que la plus

courte distance C elle-même, qui a été soumise, avec les deux droites, à nos deux mouvements de rotation; et, si l'on veut revenir, de cette position C″, à la position C, il faut effectuer en sens inverse des mouvements de rotation précisément égaux aux premiers mouvements, savoir : faire tourner C″, ou ce qui revient au même, n'' et l'' d'un angle β autour de l'axe Y en sens contraire de la flèche qui est figurée sur le plan vertical, ensuite d'un angle α autour de l'axe Z, en sens contraire de la flèche du plan horizontal; c'est ainsi que n'' et l'' deviennent n' et l', puis n et l, quand leurs projections dans ces positions diverses sont devenues (n'^h, n'^v), (l'^h, l'^v), puis (n^h, n^v), (l^h, l^v), points qui suffisent à connaître la plus courte distance cherchée C, dans sa véritable position, par ses projections C^h et C^v. On peut au reste, pour éviter des mesures d'angles, observer que n''^h, n'^h, n^h, se trouvent respectivement sur B''^h, B'^h, B^h, de même pour toutes les autres projections, ce qui permet d'abréger les constructions de beaucoup.

On obtiendrait une vérification importante en cherchant directement la longueur de la plus courte distance C, connue par ses deux projections C^h et C^v; elle devra être égale à la longueur $A''^h n''^h$ qui nous en a déjà donné la mesure.

PROBLÈME V. *Construire l'angle de deux droites données* A *et* B.

159. SOLUTION GÉNÉRALE. Pour que l'angle des deux droites soit égal à l'angle de leurs projections, nous avons vu, en traitant ce même problème par la méthode des changements de plan, qu'il fallait qu'elles fussent à la fois parallèles au plan de projection que l'on considère; et elles seront parallèles à ce plan, si le plan qui les contient toutes deux lui est lui-même parallèle *.

* Dans le cas où les droites ne sont pas dans un même plan, ce plan, qu'il faut rendre parallèle au plan de projection, est celui qui contient une des droites, et qui est parallèle à l'autre; cette double condition le détermine complétement.

Si donc nous connaissions ce plan, il suffirait de l'amener à être parallèle à l'un des plans de projection, ce que nous savons faire à l'aide de deux mouvements de rotation seulement.

Mais avant d'aborder cette solution, qui exige la construction d'un plan, nous décrirons la construction générale qui nous permet d'arriver au même résultat au moyen de trois mouvements de rotation : elle est, dans la méthode qui nous occupe, l'équivalent de la solution générale que nous avons donnée du même problème, par la méthode des changements de plan.

A l'aide de deux mouvements de rotation, nous pouvons amener la droite A à être perpendiculaire au plan vertical de projection, le premier de ces mouvements qui s'effectuera alors autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical n'ayant d'autre but que de l'amener à être parallèle au plan horizontal.

Parvenu à cette position A″ perpendiculaire au plan vertical, la droite A″ pourra nous servir d'axe de rotation pour amener aussi la droite B devenue B″ dans une position de parallélisme avec le plan horizontal, et alors il suffira de chercher les projections A'''^h et B'''^h des droites A et B, après ces trois mouvements, pour que l'angle de A'''^h et B'''^h soit l'angle cherché. (Voy. pl. XXVII.)

160. Épure. 1re *Opération*. Pour rendre A parallèle au plan horizontal, j'emploie un axe Z perpendiculaire au plan vertical et passant par un de ses points m; c'est en d'autres termes la droite projetante du point m sur le plan vertical. Z^v est un seul point qui se confond avec m^v, Z^h est la perpendiculaire abaissée de m^h sur la ligne de terre.

A devant être amenée par ce mouvement de rotation dans une position A′ parallèle au plan horizontal, il faut que sa projection verticale A'^v devienne parallèle à la ligne de terre, ce qui détermine l'angle α de la première rotation qui s'effectue dans le sens de la flèche 1 figurée sur le plan vertical; dans ce mouvement A^h est devenue A'^h et passe toujours par m^h, qui étant placé sur l'axe de rotation n'a pas été déplacé. Quant à B'^h et B'^v, elles s'obtiennent en faisant tourner la droite B du même angle α, ainsi que l'indiquent les constructions effectuées sur le plan vertical.

2e *Opération.* A′ qui était parallèle au plan horizontal doit maintenant venir en A″ et être perpendiculaire au plan vertical; c'est un axe vertical Y qu'il nous faut employer, et nous prendrons celui qui passe par le même point m et qui se projettera par conséquent en m^h et en Y^v, cette projection étant encore la perpendiculaire abaissée de m^v sur la ligne de terre. La droite A′ doit être perpendiculaire au plan vertical, il faut donc que sa projection horizontale devienne perpendiculaire à la ligne de terre, ce qui détermine l'angle β dont cette droite doit tourner dans le sens de la flèche 2 figurée sur le plan horizontal. La droite A″ a alors pour projection A''^h perpendiculaire à la ligne de terre, et sur l'autre plan le seul point m^v qui se confond avec A''^v. La position relative des droites A et B ne devant pas changer dans ces mouvements, B aura tourné en même temps du même angle β, et l'épure indique comment sont déterminées ses nouvelles projections B''^h et B''^v à la suite de cette rotation.

3e *Opération.* A″ est perpendiculaire au plan vertical; nous prenons cette droite pour axe et nous faisons tourner tout le système d'un angle tel que B″ soit devenu aussi parallèle au plan horizontal, dans une position B‴ complétement déterminée par cette condition que B'''^v soit parallèle à la ligne de terre; ce qui détermine l'angle γ de la rotation à effectuer autour de la droite A; dans ce troisième mouvement, la droite A ne s'est pas déplacée puisqu'elle sert d'axe, la droite A''^h est toujours sa projection horizontale; B'''^h se détermine facilement à l'aide de B'''^v ainsi que l'indiquent les constructions effectuées sur l'épure; et, les deux droites, étant maintenant toutes deux parallèles au plan horizontal, l'angle des deux projections A'''^h et B'''^h, est égal à l'angle des deux droites A‴ et B‴, et par conséquent à l'angle cherché des deux droites données A et B, qui n'ont aucunement changé de position relative dans les différents mouvements que nous avons effectués.

Simplification. Si, par le point m de la droite A, on mène une parallèle C à la droite B, ce qui se réduit à mener par m^h et m^v des droites C^h et C^v respectivement parallèles à B^h et B^v, le point m sera à la fois sur les deux droites A et C dont on cherchera à déterminer l'angle, et les différents

mouvements de la droite C s'effectueront par cela même plus facilement.

C'est cette circonstance qui se présente naturellement quand les deux droites données A et B sont dans un même plan et que l'on peut choisir, pour axes, des droites qui passent par leur point de rencontre m; mais cela n'est pas toujours possible sur une feuille de papier de grandeur donnée.

Observation. Dans les trois problèmes relatifs aux angles des droites ou des plans, il ne saurait y avoir d'inconvénient à remplacer les données de la question par des plans ou des lignes parallèles toutes les fois que l'on y trouverait un avantage pour le tracé, la condition de parallélisme étant suffisante pour assurer l'invariabilité de l'angle ainsi construit.

161. *Cas où l'on peut déterminer le plan des deux droites.* Lorsque l'on connaît sur l'un des deux plans de projection les traces de deux droites A et B qui se coupent, la droite qui joint ces traces est la trace même du plan des deux droites sur ce même plan de projection.

a^v et b^v étant les traces de A et de B sur le plan horizontal, la droite $a^v\ b^v$ est donc la trace horizontale HP du plan P qui contient les deux droites, et c'est ce plan P qu'il faut amener à être parallèle au plan horizontal pour que l'angle des deux droites dans l'espace soit le même que celui de leurs projections horizontales.

Un premier mouvement autour d'un axe vertical amène le plan P à être perpendiculaire au plan vertical, et un second mouvement autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical suffira pour l'amener dans la position désirée.

En prenant, pour axes de rotation successifs, les lignes projetantes du point m de rencontre des deux droites, l'épure sera d'une construction très-simple, ainsi qu'on peut le vérifier sur la Planche XXV.

Observation. De même que dans les applications de la méthode générale des changements de plan, la connaissance du plan P a réduit d'une opération le nombre de celles que nous devions effectuer pour opérer la solution générale de ce pro-

blème; c'est là un rapprochement qu'il importait de ne pas passer sous silence.

PROBLÈME VI. *Deux plans étant donnés, construire l'angle qu'ils forment entre eux.*

162. SOLUTION PAR L'ANGLE DE DEUX DROITES. L'angle de deux plans étant égal, comme nous l'avons vu, au supplément de l'angle de deux perpendiculaires respectivement abaissées d'un point quelconque de l'espace sur les deux plans donnés, la question se trouve immédiatement ramenée à celle de l'angle de deux droites.

On prendra donc arbitrairement un point quelconque m; de ce point on abaissera des perpendiculaires sur les plans; ces perpendiculaires A et B seront immédiatement connues par leurs projections, car ces projections passent par celles du point m, et doivent être respectivement perpendiculaires aux traces des plans.

A étant dès lors connue par A^h et A^v, perpendiculaires à HP et VP, B étant pareillement connue par B^h et B^v perpendiculaires à HQ et VQ, on pourra opérer sur ces lignes A et B, comme nous avons appris à le faire dans le problème précédent, et c'est là effectivement le procédé que l'on suit généralement.

L'angle ω des droites A et B étant connu, l'angle cherché aura pour mesure $180^\circ - \omega$.

163. SOLUTION DIRECTE. Elle s'obtiendra comme par la méthode des changements de plan, par l'angle même des deux traces, si l'on peut amener les deux plans P et Q à être à la fois perpendiculaires à l'un des plans de projection, au plan vertical par exemple.

Or, si le plan P était parallèle au plan horizontal, et si l'on faisait tourner le système invariable des deux plans autour d'un axe vertical, le plan P n'en resterait pas moins toujours perpendiculaire au plan vertical, sur lequel sa trace ne changerait même pas, et l'on pourrait profiter de ce mouvement de rotation pour rendre en même temps Q perpendiculaire au plan vertical.

Or, nous savons qu'il nous faut deux mouvements de rota-

tion pour amener le plan P dans cette position; le plan Q étant alors quelconque, nous pourrons toujours, avec trois mouvements de rotation, amener à la fois les plans P et Q à être perpendiculaires au plan vertical, position spéciale dans laquelle l'angle de leurs traces sera l'angle même des deux plans. (Voy. pl. XXIX.)

ÉPURE. Pour rendre le plan P parallèle au plan horizontal, il est nécessaire d'effectuer deux opérations.

1re *Opération*, qui a pour but de rendre le plan P perpendiculaire au plan vertical : Dans cette position, sa trace horizontale HP doit devenir perpendiculaire à la ligne de terre; prenons pour axe vertical la ligne projetante d'un point quelconque m, choisi pour plus de simplicité dans le plan P, et faisons tourner le plan autour de cet axe dans le sens indiqué par la flèche 1, jusqu'à ce que HP vienne se placer sur la perpendiculaire HP′ à la ligne de terre (m^h étant pris arbitrairement, m^v s'en déduit immédiatement au moyen d'une horizontale du plan dont la projection horizontale doit être parallèle à HP et la projection verticale parallèle à la ligne de terre). Le plan P aura tourné d'un angle α, dont le tracé même nous donne la mesure; et, pour avoir la trace verticale de ce plan, il suffira de joindre le point p', en lequel HP′ rencontre la ligne de terre, au point m^v, qui est la projection verticale du point m situé dans le plan P et qui se trouvant sur l'axe n'a éprouvé pendant la rotation aucun déplacement. Le plan P′ étant perpendiculaire au plan vertical, VP′ est à la fois sa trace verticale et la projection de tout ce qui est contenu dans ce plan.

P et Q formant le système invariable de position relative dans le problème qui nous occupe, lorsque P a tourné de l'angle α dans le sens de la flèche 1, Q a nécessairement tourné du même angle dans le même sens. HQ est devenu HQ′, et l'on trouvera VQ′, ainsi que nous avons appris à le faire par la considération de deux points du plan Q qui auront tourné dans cette rotation du même angle α. L'opération du déplacement de ces deux points est suffisamment représentée sur l'épure, et la construction nous fournit la nouvelle trace VQ′ qui correspond à HQ′.

2e *Opération*, qui a pour but de rendre le plan P′ parallèle au plan horizontal de projection : L'axe sera maintenant perpen-

diculaire au plan vertical, ce sera la ligne projetante du point m sur le plan vertical.

Pour que P′ devienne parallèle au plan horizontal, il faut et il suffit que sa trace verticale soit parallèle à la ligne de terre ; dans le mouvement que nous effectuons le plan P′ ne cesse pas d'être perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale passe donc toujours par la projection verticale de l'un quelconque de ses points, du point m par exemple, et lorsqu'elle viendra se placer sur VP″ elle aura tourné, ainsi que le plan lui-même, d'un angle β dont le tracé même nous donne la mesure, et dont doit tourner aussi le plan Q′ dont les traces VQ″ et VH″ se déterminent d'après cette condition.

Le plan P″ étant parallèle au plan horizontal n'a pas de trace horizontale ; il est donc inutile de la chercher, et les choses sont ainsi placées comme nous cherchions à le faire.

3e *Opération*. Reste à faire tourner le système autour d'un axe vertical (nous choisissons toujours la ligne projetante de m), de telle sorte que le plan Q, maintenant en Q″, soit aussi amené à être perpendiculaire au plan vertical. Dans ce mouvement la trace du plan P ne change pas, VP″ est à la fois VP″. HQ″ est venu se placer perpendiculairement à la ligne de terre, et la trace VQ″ se détermine, comme VP″ a été déterminé tout à l'heure.

L'angle cherché est l'angle de VP″ avec VQ″.

Cas où l'on connaît l'intersection des deux plans.

164. Quand on peut construire l'intersection des deux plans P et Q, on évite un mouvement de rotation, car l'angle cherché est l'angle même des traces toutes les fois que l'intersection des deux plans est perpendiculaire au plan de ces traces, et nous avons appris déjà, par deux mouvements de rotation, à faire qu'une droite quelconque devienne perpendiculaire à l'un des plans de projection.

C'est donc ainsi qu'il faudra opérer dans ce cas ; la connaissance de l'intersection nous tient lieu d'un mouvement de rotation, de même qu'elle nous a évité un changement de plan dans un cas semblable.

Cas où l'un des plans donnés se confond avec l'un des plans de projection.

164 *bis*. Le problème est alors celui-ci : *déterminer l'angle d'un plan donné* P *avec l'un des plans de projection.*

Lorsque le plan P est perpendiculaire au plan vertical, l'angle de ce plan avec le plan horizontal est mesuré par l'angle de sa trace verticale VP avec la ligne de terre, car cette trace et cette ligne de terre sont les deux intersections des deux plans que l'on considère avec un même plan (V) perpendiculaire à leur commune intersection (HP).

Il nous faut donc amener le plan P, Planche XXXII, figure 2, dans cette position en le faisant tourner autour d'un axe vertical Z jusqu'à ce que sa trace HP vienne se placer en H'P perpendiculairement à la ligne de terre. Ce déplacement s'effectue à l'aide de la circonférence tangente M^h. Lorsque l'on connaît HP', on a déjà le point p' qui appartient à la trace verticale du plan P', et pour en avoir un autre point, nous considérerons l'horizontale M du plan P qui passe par l'axe Z ; la projection horizontale de cette horizontale est A^h qui passe par Z^h, et est parallèle à HP ; sa projection verticale est M^v, parallèle à la ligne de terre menée par le point n^v, qui est la trace de cette horizontale sur le plan vertical, et qui s'obtient en élevant, de n^h sur la ligne de terre, une perpendiculaire que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre n^v avec VP. m^v est alors la projection du point m du plan P, qui a sa projection horizontale en m^h ; ce point est sur l'axe, et par conséquent ne se déplace pas dans le mouvement de rotation, et comme le plan P' est perpendiculaire au plan vertical, tout ce qui se trouve sur le plan P' se projette suivant sa trace, et réciproquement sa trace doit passer par toute projection verticale m^v d'un point du plan.

Si nous avons reproduit ici ces détails, c'est que le problème qui nous occupe se présente souvent dans la pratique, mais cette seule opération que nous venons d'effectuer n'est autre chose que la troisième des opérations que nous avons dû faire pour résoudre le problème général de l'angle des deux plans.

165. Problème VII. *Construire l'angle formé par une droite et par un plan donnés de position dans l'espace.*

SOLUTION PAR L'ANGLE DE DEUX DROITES. Nous avons vu, en traitant cette question par la méthode des changements de plan, que, si d'un point de la droite donnée A, on abaissait, sur le plan donné P, une perpendiculaire B, l'angle compris entre A et B était le complément de l'angle cherché de la droite A avec le plan P ; α étant l'angle des deux droites, l'angle cherché sera donc $90^\circ - \alpha$.

La droite B se construit facilement, puisqu'il suffit, pour obtenir ses projections, d'abaisser respectivement, des points m^h et m^v, projections d'un point quelconque m de la droite A, des perpendiculaires sur les traces HP et VP, du plan P. Le problème est ainsi ramené à trouver l'angle de deux droites, ce que nous avons appris à exécuter par l'un des moyens étudiés précédemment.

Mais on peut aussi obtenir, par la méthode des mouvements de rotation, l'angle d'une droite et d'un plan, sans construire la normale, en cherchant à placer les données de la question dans la même position spéciale à laquelle nous avons eu recours lorsque nous avons résolu ce problème par la méthode des changements de plan.

166. SOLUTION DIRECTE. Cette position spéciale est celle-ci : il faut que le plan soit perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan vertical, par exemple, et que la droite soit parallèle à ce même plan ; quand cette double circonstance est réalisée, l'angle de la droite et du plan se trouve projeté en vraie grandeur sur l'angle que fait la trace verticale du plan avec la projection verticale de la droite.

Trois changements de plan nous ont servi à réaliser cette condition ; trois mouvements de rotation vont aussi nous conduire au même résultat.

Appelant A la droite donnée, et P le plan, les deux premiers changements de plan nous ont conduit à de nouveaux plans de projection, tels que P soit perpendiculaire à l'un d'eux ; les deux premiers mouvements de rotation nous conduiront, pour le plan P, à une nouvelle position P″, dans laquelle ce plan sera parallèle à l'un de nos plans de projection, au plan horizontal, par exemple ; et ce curieux rapprochement entre les opérations

que nécessitent les deux méthodes pourra se continuer de la même façon pour la troisième opération. Au moment de l'effectuer, P est parallèle à H″, lorsque l'on opère par changements de plan, P″ est parallèle à H lorsqu'on emploie les mouvements de rotation ; dans l'un et l'autre cas, il ne s'agit plus que de rendre A″ parallèle au plan horizontal, pour que les données de la question remplissent les conditions que nous avons posées en commençant. (Voy. pl. XXXI.)

Épure. A est donnée par ses deux projections A^h et A^v; le plan P, par ses deux traces HP et VP.

1re *Opération.* L'opération qui a pour objet de rendre P perpendiculaire au plan vertical est effectuée, au moyen d'un axe vertical Z, que l'on fait, pour plus de simplicité, passer par un point *m* de la droite A. Cet axe se projette horizontalement en m^h et verticalement en Z^v, perpendiculaire à la ligne de terre. Pour que le plan P devienne perpendiculaire au plan vertical, il faut que la trace horizontale HP, en tournant autour de m^h, vienne se placer en HP′, perpendiculairement à la ligne de terre. La rotation s'opère dans le sens de la flèche 1, et après avoir tourné d'un angle α, la trace HP′ du plan P se trouve immédiatement indiquée sur l'épure. Le point *p*′, où cette trace rencontre la ligne de terre, est déjà un point de la trace verticale VP′, dont on trouvera un autre point par la considération d'une horizontale du plan P.

P et A constituent, dans le problème que nous cherchons à résoudre, le système dont les éléments ne doivent point varier de position les uns par rapport aux autres. Quand donc P a tourné de l'angle α, la droite A a dû tourner du même angle, ce qui, par l'examen du déplacement d'un point de A^h, donne facilement un point de A'^h. D'ailleurs, le point *m*, qui appartient à la droite, n'a pas changé de position, puisqu'il est situé sur l'axe ; la projection A'^v, comme A^v, doit donc passer par m^v, et cette projection verticale de la nouvelle position A′ de la droite A, se trouve ainsi construite.

2e *Opération*, qui a pour but de rendre le plan P′ parallèle au plan horizontal de projection : l'axe sera maintenant perpendiculaire au plan vertical; nous choisissons la ligne projetante du point *m* sur ce plan.

La trace VP″ du plan P, devenu parallèle au plan horizontal, se trouve absolument comme dans le précédent problème : ce plan n'a plus de trace horizontale, et, connaissant l'angle β, dont ce plan a dû tourner pour arriver à cette position, il suffit de faire tourner A'^v du même angle dans le sens de la flèche 2, pour obtenir A''^v, et, par suite, A''^h.

3e *Opération*. Le plan P″ étant parallèle au plan horizontal, sa trace ne changera pas si on le fait tourner autour d'un axe vertical, pour lequel nous choisissons encore notre premier axe Z, qui se confond avec la droite qui projette le point *m* sur le plan horizontal; quel que soit l'angle dont on fera ainsi tourner le système, le plan P″ ne cessera pas d'être perpendiculaire au plan vertical, et, si l'on profite de ce mouvement pour amener la droite A, maintenant en A″, en une nouvelle position A‴, où elle soit parallèle au plan vertical, nous aurons réalisé les conditions que nous désirons obtenir.

Il faut pour cela que la projection A''^h tourne jusqu'à ce qu'elle vienne se confondre avec la parallèle menée à la ligne de terre par la projection invariable m^h du point *m*. L'amplitude de ce troisième mouvement de rotation est donnée par l'angle γ, que fait A''^h avec A'''^h; il s'effectue dans le sens de la flèche 3, et cette connaissance suffit pour construire, ainsi que nous l'avons fait maintes fois, la projection verticale correspondante, qui est ici A'''^v. L'angle de A'''^v et de VP‴, qui se confond ici avec VP″, est précisément l'angle cherché.

Observation sur le choix de l'angle. Nous rappellerons que l'angle d'une droite et d'un plan ne peut jamais être plus grand qu'un angle droit; il faudra toujours prendre pour la mesure de cet angle le plus petit des deux angles que forment entre elles les deux droites.

Cas où l'on connaît le plan des deux droites qui mesurent l'angle de la droite et du plan.

167. Si d'un point quelconque *a* de la droite A nous abaissons une perpendiculaire C sur le plan P, le plan Q, qui contient cette perpendiculaire et la droite A elle-même, coupe le plan donné suivant une troisième droite B, dont l'angle avec A mesure l'angle demandé.

Si nous connaissions ce plan Q, ou seulement une de ses traces, sa trace VQ, par exemple, nous pourrions, par deux mouvements de rotation, amener ce plan à être parallèle au plan vertical de projection. Dans cette position du plan Q, le plan P, auquel il est, par construction, perpendiculaire, serait nécessairement aussi perpendiculaire au plan vertical : la double condition d'un plan perpendiculaire et d'une droite parallèle à un même plan de projection, se trouvant alors réalisée, l'angle cherché de la droite et du plan sera donné en vraie grandeur par l'angle que fait la projection de la droite avec la trace du plan.

Deux mouvements de rotation suffisent; et, cette fois encore, la construction du plan Q nous a permis de réduire à deux, au lieu de trois, le nombre des mouvements de rotation à effectuer.

Cas où le plan donné se confond avec l'un des plans de projection.

168. Le problème peut alors s'énoncer plus simplement ainsi : construire l'angle qu'une droite donnée fait avec l'un des plans de projection.

Les données sont ainsi placées dans les conditions spéciales auxquelles les deux premières opérations de la solution générale de l'angle d'une droite et d'un plan ont ramené la disposition primitive. La troisième opération seule est nécessaire.

Si l'on demande, par exemple, l'angle de la droite A, Planche XXXIII, figure 2, avec le plan horizontal, il suffit de faire tourner la droite autour d'un axe vertical passant par un de ses points jusqu'à ce que cette droite soit venue occuper une position A′ parallèle au plan vertical.

Si m est le point par lequel nous faisons passer l'axe vertical, il faudra faire tourner A^h jusqu'à ce que cette droite se confonde avec la parallèle A'^h menée à la ligne de terre par le point m^h. Dans ce mouvement, n^h sera venu se placer en n'^h dont la projection verticale n^v vient en même temps en n'^v et la nouvelle projection verticale de la droite devient $m^v n'^v$ ou A'^v; l'angle de A'^v avec la ligne de terre est l'angle cherché.

On arrivera plus facilement à la construction de l'angle de la figure 3, si l'on peut prendre, pour axe, la ligne qui projette, sur le plan horizontal, la trace verticale de la droite; la

droite alors se rabat sur le plan vertical lui-même, et la projection A'^h se rabat sur la ligne de terre. En examinant le déplacement d'un point quelconque m de la droite, on trace aussitôt la nouvelle projection A^h qui n'est autre chose que la droite elle-même, et dont l'angle avec la ligne de terre est encore l'angle cherché.

La construction s'opérerait de la même façon pour l'angle que fait la droite A avec le plan vertical.

LIVRE III.

INTERSECTIONS DES LIGNES ET DES SURFACES.

169. Jusqu'ici nous avons résolu les différents problèmes de position relative de la ligne droite et du plan sans nous occuper en aucune façon des problèmes d'intersection des lignes droites et des surfaces planes que nous avons eu à considérer ; nous avons reconnu toutefois que, dans l'emploi des méthodes générales, le nombre des opérations pouvait quelquefois être notablement diminué lorsque l'on connaissait ces intersections, et il est d'autant plus important de savoir les déterminer que les arêtes d'un solide, par exemple, sont toujours des *lignes intersections* des surfaces qui terminent ces solides, et que dans les arts la connaissance exacte de ces arêtes est indispensable et d'un usage constant.

Les méthodes générales qui ont été précédemment développées peuvent très-bien servir à la détermination des intersections des différentes surfaces, mais il arrive souvent, que l'on peut, par des considérations plus simples, arriver au même but. C'est ce que nous reconnaîtrons d'abord sur les intersections des plans entre eux et sur les intersections des droites et des plans.

CHAPITRE PREMIER.

INTERSECTION DES PLANS ENTRE EUX.

170. L'intersection de deux plans est une ligne droite qui sera connue si deux de ses points le sont : soit I cette intersection (Pl. XXXIV, fig. 1) pour les deux plans P et Q donnés par leurs traces, n'est-il pas évident que la droite I étant dans le plan P ses traces sont situées sur les traces de ce plan; il en est de même pour cette même droite I par rapport au plan Q, en telle sorte que la trace a^h de l'intersection I doit être à la fois sur HP et sur HQ, et par conséquent à la rencontre de ces deux li-

gnes ; la trace b^v sera également le point de rencontre de VP et VQ, traces verticales des deux plans donnés.

Or a^h étant dans le plan horizontal, sa projection verticale est a^v sur la ligne de terre ; b^v a, pour une raison semblable, sa projection horizontale en b^h, et par suite I^h et I^v sont immédiatement connus.

Ce moyen général de trouver l'intersection de deux plans ne souffre aucune exception, à condition que les points a et b ne soient pas en dehors de l'épure ; mais il n'est la plupart du temps pas possible de le mettre en pratique parce que HP et HQ, par exemple, sont tellement placés que a^h ou b^v sont trop éloignés l'un de l'autre, ou bien parce que ces deux lignes se rencontrant sous un trop petit angle, leur point de concours ne se trouve pas déterminé avec assez de précision ; on sait en effet que les lignes du dessin ayant une certaine épaisseur, si deux d'entre elles ont une direction peu différente, elles paraissent se confondre sur une grande longueur, au milieu de laquelle il faut, pour ainsi dire, choisir arbitrairement le point convenable.

171. Avant d'examiner par quels moyens on doit échapper, dans la pratique, à ces difficultés, en ce qui concerne l'intersection de deux plans, nous nous arrêterons à quelques cas particuliers dont la solution découle de la règle générale.

Si les deux plans P et Q (fig. 2) ont leurs traces horizontales parallèles, il n'est plus possible de trouver le point a^h, ou plutôt ce point est situé à l'infini, et l'on serait embarrassé pour trouver l'intersection commune si l'on ne remarquait qu'elle est nécessairement parallèle aux droites HP et HQ, contenues respectivement dans les deux plans : b^v en effet étant un point du plan P, toute droite menée par ce point parallèlement à HP sera tout entière dans ce plan, et par la même raison dans le plan Q : HP et HQ sont des horizontales, l'intersection cherchée est donc horizontale aussi, sa projection verticale est la parallèle I^v à la ligne de terre, et sa projection horizontale I^h s'obtient en menant par b^h une parallèle aux traces des deux plans donnés.

Il serait inutile d'indiquer que ces considérations sont également applicables au cas pour lequel les deux traces verticales seulement sont parallèles.

Si cette circonstance de parallélisme existait à la fois pour les traces horizontales et les traces verticales, les plans P et Q seraient parallèles et, par conséquent, il n'y aurait pas à rechercher leur intersection.

172. La figure 3 se rapporte au cas dans lequel l'un des deux plans donnés, le plan P, serait parallèle à l'un des deux plans de projection, au plan horizontal; l'intersection est alors parallèle à la trace horizontale du plan, parce que les intersections de deux plans parallèles H et P par un troisième Q sont nécessairement parallèles entre elles, et la connaissance du point b^v permet de tracer I^h; I^v se confond avec VP.

173. Dans la figure 4, le plan P est perpendiculaire au plan vertical; tout ce qui est contenu dans ce plan se trouve alors, ainsi que nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de le remarquer, projeté suivant sa trace verticale, et par conséquent aussi l'intersection commune, dont on connaît dès lors la projection verticale I^v; la projection horizontale se détermine comme à l'ordinaire.

La fig. 5 ne présente aucune modification à la solution générale, encore bien que l'un des deux plans soit parallèle à la ligne de terre; I^h et I^v sont toujours les deux projections de l'intersection commune.

174. Nous avons vu déjà que les deux traces d'un plan pouvaient être dans le prolongement l'une de l'autre, comme dans la Planche XXXV (fig. 1); la détermination de la commune intersection ne présente non plus aucune difficulté particulière; mais il n'en est plus de même lorsque les deux plans donnés se trouvent à la fois dans cette condition (fig. 2); la trace horizontale et la trace verticale de la droite se confondent alors en un même point, et les deux projections de l'intersection se superposent en épure sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

175. Mais, dans ces cas particuliers, comme dans le cas général, la solution simple que nous venons d'indiquer n'est pra-

ticable qu'autant que les traces se rencontrent, et si cette circonstance ne se présente pas, il faut avoir recours à des moyens particuliers parmi lesquels nous citerons tout d'abord l'emploi d'un plan auxiliaire.

Le lecteur a déjà compris comment l'introduction de ce nouveau plan R pouvait conduire à la connaissance de la commune intersection des plans P et Q ; supposons, en effet, que l'intersection de P et R soit connue, nous la désignerons par A et aussi l'intersection, B de Q et de R ; les deux droites A et B contenues toutes les deux dans un même plan R se rencontreront en général en un certain point *m* qui appartiendra dès lors aux trois plans P, Q et R ; l'emploi d'un nouveau plan auxiliaire T fournira de la même manière un autre point *n* de cette intersection, qui se trouvera par conséquent déterminée.

On peut suivre cette série d'opérations sur la figure 3. HR et VR étant choisis de manière que chacune de ces lignes vienne respectivement rencontrer les traces du plan donné, et de manière aussi qu'elles se rencontrent elles-mêmes en un même point *r* de la ligne de terre, les deux droites HR et VR pourront être considérées comme les traces d'un plan R dont l'intersection avec P se déterminera en A^h et A^v par les moyens ordinaires, et dont on obtiendra avec la même facilité l'intersection, (B^h, B^v) avec le plan Q.

Les deux droites A et B se rencontrent en un point *m*, dont la projection m^h est à la rencontre des deux projections A^h et B^h ; m^v est de même au point de rencontre de A^v et B^v, et une vérification se présente en ce que, pour être les projections d'un même point *m* de l'espace, les deux projections m^h et m^v doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. HT et VT étant choisis dans des conditions analogues, la même série d'opérations conduit successivement à (C^h, C^v), (D^h, D^v) dont l'intersection se trouve en (n^h, n^v).

m et *n*, ainsi déterminés, permettent enfin de tracer la droite I commune intersection des deux plans primitifs P et Q.

Cette suite d'opérations simples est longue et compliquée ; et, au point de vue pratique, elle présente des difficultés qu'au premier aperçu l'on ne voit pas, et que notre figure est destinée à mettre en relief ; encore bien que les plans auxiliaires R et T soient placés dans des conditions toutes différentes, les points

m et *n* sont très-voisins l'un de l'autre, et par conséquent la ligne qui les joint n'est pas déterminée avec une précision suffisante : le choix des plans auxiliaires est donc assez embarrassant et l'on ne réussit pas toujours à réunir toutes les conditions auxquelles ce choix doit satisfaire, savoir :

1° Les traces doivent se couper sous des angles suffisamment grands : il est désirable, dans les épures d'exécution, de n'avoir jamais à apprécier la position du sommet d'un angle inférieur à 45°.

2° Les points d'intersection tels que m^h et n^h doivent se déterminer aussi par les rencontres de droites suffisamment inclinées l'une par rapport à l'autre.

3° Les points qui fixent la droite I doivent être suffisamment éloignés pour que les erreurs, s'il y en a, affectent moins la position de la droite.

Ces trois conditions rendent le choix des plans auxiliaires fort difficile; et, dans la plupart des cas, on ne met point en usage ce procédé que nous n'avons présenté ici d'une manière générale que comme introduction au procédé général de détermination de l'intersection des surfaces entre elles : car c'est aussi par la considération des surfaces auxiliaires dont on cherche l'intersection avec les surfaces données, que l'on parvient, dans la plupart des cas, à déterminer en géométrie descriptive l'intersection de deux surfaces : nous rencontrerons de nombreux exemples de ce mode d'opérer*.

---

* Nous avons donné, figure 4 et figure 5, la solution du problème qui nous occupe, dans deux cas particuliers qui exigent toujours l'emploi d'un plan auxiliaire.

La figure 4 se rapporte à la recherche de l'intersection de deux plans qui viennent rencontrer l'un et l'autre la ligne de terre au même point. Leurs traces sont alors telles que HP, VP, HQ, VQ; et, si l'on vient à couper le système de ces deux plans par un troisième qui soit perpendiculaire à la ligne de terre, les traces de ce nouveau plan se composeront d'une seule et même ligne droite (HR,VR) perpendiculaire elle-même à LT. *a* est déjà un point de l'intersection commune : le plan auxiliaire R nous en fournit un second *b*, dont les projections seront nécessairement placées sur la ligne unique, en laquelle se confondent les deux traces du plan R. Pour connaître ce point *b*, il suffit de faire tourner le plan R et tout ce qui est contenu dans ce plan autour de sa trace verticale VR, de manière à le rabattre sur le plan vertical de projec-

176. En ce qui concerne l'intersection de deux plans, lorsque les données sont telles que les points de rencontre des traces sont hors des limites du dessin, l'emploi de plans auxiliaires parallèles aux plans de projection peut être d'une grande utilité, parce que ce moyen, sans changer les directions des lignes, permet d'en considérer de nouvelles qui se rencontrent à des distances moindres. C'est ce que démontre la Planche XXXVI, fig. 1, dans laquelle on a cherché la projection horizontale seulement de l'intersection des plans P et Q donnés par leurs traces. Employons, comme plan auxiliaire, un premier plan horizontal R donné par sa trace unique VR, ce plan, étant parallèle au plan horizontal de projection, coupera le plan P suivant une parallèle A, à la trace horizontale HP, qui aura pour projection horizontale la parallèle A^h à HP, le point a^h de cette droite étant donné en mettant en projection horizontale sur la ligne de terre la trace a^v donnée sur le point de rencontre des deux traces VP et VR. La projection B^h de la droite B intersection de Q et de R s'obtiendra de la même façon, et m^h sera comme précédemment un des points de la projection I^h cherchée ; on trouvera n^h par le même moyen, en considérant un nouveau plan auxiliaire T et la projection I^h ne sera autre chose que la droite qui joint m^h et n^h.

---

tion. L'intersection des deux plans R et P dans leur position primitive, c'est la droite A qui joint le point p contenu dans le plan horizontal de projection au point q contenu dans le plan vertical. Dans le mouvement de rotation dont nous venons de parler, le point q n'a pas changé de position, et le point p est venu se placer en p' sur la ligne de terre, de sorte que A' est la nouvelle position de la droite A. On trouvera, de la même manière, la position après le rabattement de la droite B, commune intersection des deux plans Q et R ; A' et B' se rencontrent en b' qui, ramené en sa véritable position, aura pour projections b^v et b^h.

Les projections de la droite sont dès lors I^h et I^v qui se trouvent déterminés ainsi au moyen de constructions très-simples.

Dans le cas de la figure 5, qui se rapporte à l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre, on a également employé un plan auxiliaire R perpendiculaire à cette ligne ; on détermine, de la même manière que dans l'exemple qui précède, les deux projections b^h et b^v du point b de l'intersection qui se trouve dans le plan R, et ces seules projections suffisent parce que l'on sait à l'avance que les projections de l'intersection I qui sont parallèles à LT doivent passer respectivement par ces deux points b^h et b^v.

De ce que les plans auxiliaires, dans la solution qui précède, ont été choisis d'une certaine façon, les constructions ont été considérablement simplifiées ; mais ce choix précisément n'a conduit à obtenir que la projection horizontale de l'intersection ; pour avoir la projection verticale, il suffirait de mettre m^h en projection verticale en m^v sur A^v, n^h en projection verticale sur B^v en n^v ; I^v sera la droite qui joint m^v à n^v.

177. Cette solution est sans contredit la plus simple et la plus sûre lorsque les deux traces HP et HQ, quoique ne se rencontrant pas dans les limites du dessin, sont néanmoins assez inclinées l'une par rapport à l'autre pour qu'il ne puisse y avoir d'incertitude sur la position des points m et n. La note ci-jointe* présente d'ailleurs la construction qu'il convient d'employer lorsque les traces de l'un des deux systèmes, vertical ou horizontal, se rencontrent sur l'épure même ; mais lorsque les traces données, étant suffisamment prolongées, ne pourraient se rencontrer que sous un angle fort aigu, il est préférable d'avoir recours à des plans auxiliaires passant par la ligne de terre, et plus ou moins inclinés sur les deux plans de projection ; c'est ainsi qu'on a opéré dans la fig. 3.

Prenons pour plan auxiliaire le plan T qui passe par la ligne de terre LT : cette ligne sera à la fois la trace horizontale et la trace verticale du plan T, qui ne sera réellement déterminé de position que si l'on connaît par ses projections m^h et m^v, un point m qu'il renferme. Ce plan auxiliaire coupera respective-

---

* On sait que les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles entre elles, et si l'on connaissait à la fois un point de l'intersection des deux plans donnés et sa direction, le problème serait résolu. Un point, on l'a immédiatement dans le cas de la figure 2 en (a^h, a^v) donné par l'intersection des deux traces verticales VP et VQ ; la direction, on peut la trouver par la considération d'un nouveau plan parallèle au plan P par exemple, que l'on voit représenté en P' ; il s'agit seulement de choisir le nouveau point p', en lequel les nouvelles traces viennent couper la ligne de terre, assez rapproché du point Q pour que les deux traces HQ et HP' se coupent dans les limites du dessin ; l'intersection I' des deux plans Q et P' étant connue par ses projections à la manière ordinaire, il suffira, par les moyens pratiques que tout le monde connaît, à l'aide de la règle et de l'équerre, de mener respectivement à ces projections les parallèles I^h et I^v pour que l'intersection cherchée I soit complétement déterminée.

ment les deux plans donnés suivant deux droites A et B, passant respectivement par les points p et q de la ligne de terre.

Il est d'ailleurs facile de déterminer un autre point de chacune de ces droites, par la considération d'un nouveau plan R, parallèle au plan vertical et passant par le point m; ce plan R coupe évidemment le plan T suivant une droite M parallèle à la ligne de terre, et dont les projections sont, par conséquent, M^h et M^v; et il coupe les plans primitifs P et Q, suivant des verticales de ces plans, qui se projettent horizontalement sur HR, et verticalement suivant les parallèles N^v et O^v aux traces verticales des plans primitifs.

Nous connaissons donc à la fois les trois droites M, N, O, qui sont respectivement les intersections par un même plan R des trois plans P, Q, T; M et N se rencontrent au point a, M et O en un point b, et ces deux points a et b appartiennent respectivement à l'intersection des plans P et Q avec le plan T. Leurs projections horizontales se rencontrent en un point i^h, projection horizontale d'un point i de l'espace situé à la fois dans le plan P et dans le plan Q.

Les mêmes constructions conduiraient par la considération d'un nouveau plan T′ passant, comme le premier, par la ligne de terre, à la connaissance de la projection horizontale i'^h d'un nouveau point i' de cette même intersection, dont la projection I^h devra passer par les deux points i^h et i'^h.

La solution à laquelle nous venons d'être conduit a exigé l'intervention de quatre plans auxiliaires, savoir : T et T′, R et R′, et elle ne saurait, par conséquent, être recommandée que quand les autres moyens que nous avons précédemment passés en revue, ne peuvent conduire d'une manière suffisamment précise à un résultat satisfaisant; aussi est-il nécessaire d'en borner l'emploi au seul cas dans lequel les quatre traces HP, HQ, VP, VQ, étant à la fois presque perpendiculaires à la ligne de terre, on ne peut compter sur l'exactitude des points d'intersection des droites, très-peu inclinées les unes par rapport aux autres.

En opérant comme nous l'avons fait, dans la figure 3, le point m peut être choisi très-près du plan horizontal, et aussi loin du plan vertical que les dimensions du dessin le per-

mettent ; le plan T qui contient ce point m, est alors très-peu incliné sur le plan horizontal, et par conséquent A^h et B^h s'écarteront aussi peu que l'on voudra de la ligne de terre, de manière à se couper sous tel angle que l'on croira plus favorable, et à aussi peu de distance que l'on voudra de la ligne LT.

Il est bon, toutefois, de remarquer que cette construction ne conduit qu'à une seule des deux projections, et que si, dans l'épure de la figure 3, par exemple, on voulait avoir la projection verticale I^v, il faudrait avoir recours à deux plans U et U′ peu inclinés sur le plan vertical, en choisissant alors un nouveau point m très-près de ce plan, et autant éloigné que possible du plan horizontal.

178. On fera bien d'utiliser les constructions qui précèdent, en choisissant, pour chaque cas particulier, celles qui seront à la fois les plus simples et les plus sûres, lorsqu'il s'agira de trouver isolément l'intersection de deux plans donnés : ni la méthode des changements de plan, ni surtout celle des mouvements de rotation ne sauraient ordinairement fournir des moyens plus courts; mais il en pourrait être tout autrement s'il s'agissait de trouver les intersections de deux séries de plans respectivement parallèles : c'est pourquoi nous indiquerons encore ces solutions qui d'ailleurs ont l'avantage de pouvoir s'appliquer à tous les cas, et qui nous offriront ainsi des preuves nouvelles de la fécondité de ces deux méthodes.

La Planche XXXVII est consacrée à ces constructions : nous commencerons avec la figure 1 par la méthode des changements de plan, et nous ne ferons en cela que reproduire des considérations présentées déjà lorsqu'il s'est agi de l'angle de deux plans.

Si le plan P, par exemple, était confondu avec le plan de projection, la trace du plan Q serait l'intersection cherchée elle-même : il suffira donc, pour résoudre le problème donné dans les conditions générales, de changer de plan de projection, de manière que l'un des nouveaux plans soit le plan P lui-même : pour cela deux changements de plan sont nécessaires; on remplacera d'abord le plan de projection V par un nouveau plan V′ perpendiculaire à P, au moyen d'une ligne de terre L′T′ perpendiculaire à HP; on cherchera la trace V′P

du plan P sur ce nouveau plan de projection V′ et on prendra cette trace pour nouvelle ligne de terre L″T″ : le plan H″ que l'on substituera au plan primitif H sera alors le plan P lui-même, et il suffira de déterminer la trace H″Q du plan Q sur ce plan, pour avoir, par cette même trace, la projection, sur le plan H″, de l'intersection cherchée.

Ces opérations nous sont assez familières pour que nous regardions $I^{h''}$ comme connu, et il suffit maintenant de retrouver les projections primitives I^h et I^v de cette même intersection. Considérons pour cela un point m sur l'intersection I; ce point m aura pour projection $m^{h''}$ sur $I^{h''}$, et $m^{v'}$ sur L″T″ qui se confond avec $I^{v'}$; $m^{v'}$ donnera m^h en abaissant la perpendiculaire $m^{v'}m^h$ sur la ligne de terre L′T′, et en prenant $\alpha' m^h = m^{v'}m^{h''}$; puis on aura m^v en mettant m^h en projection verticale par rapport à la ligne de terre primitive LT et en prenant $\alpha m^v = \alpha' m^{v'}$.

La même série d'opérations pourrait se faire pour un autre point quelconque $r^{h''}$ de $I^{h''}$, mais plus simplement pour le point $n^{h''}$ qui est à la fois $n^{v'}$ et qui donne immédiatement n^h et n^v.

L'intersection cherchée des plans P et Q est donnée par ses projections I^h et I^v sur les plans primitifs de projection, et nous n'avons eu à effectuer, pour arriver à ce résultat, aucune autre opération que celles que nous avons mises en œuvre déjà dans plusieurs circonstances.

179. La figure 2 ne présente non plus qu'une application des procédés ordinaires de la méthode des mouvements de rotation à la recherche de l'intersection de deux plans; nous avons conservé les mêmes données pour faire voir clairement que nous étions toujours, par l'une et par l'autre méthode, conduits au même résultat. Les axes choisis pour effectuer les mouvements de rotation sont d'abord un axe Z, contenu dans le plan vertical, et ensuite la trace même HP′ de celui des deux plans que l'on amène à se superposer sur le plan horizontal de projection.

CHAPITRE II.

INTERSECTIONS DES DROITES ET DES PLANS.

I. INTERSECTION D'UN PLAN ET D'UNE DROITE.

180. Le problème de la détermination du point de rencontre d'une droite et d'un plan est, en quelque sorte, implicitement résolu par les moyens que nous venons d'indiquer pour trouver l'intersection de deux plans. Si, en effet, nous faisons passer un plan quelconque par la droite donnée A, ce plan coupera le plan donné suivant une droite I dont l'intersection avec la première sera le point cherché; car ce point se trouvera à la fois dans le plan et sur la droite, et ces deux éléments géométriques ne sauraient avoir d'autre point commun.

Cette construction se trouve réalisée dans la figure 1, Planche XXXVIII. HP et VP sont les deux traces du plan donné; A^h et A^v sont les deux projections de la droite; les traces de cette droite sont a et b^v; par un point r pris arbitrairement sur LT, je conduis deux droites passant respectivement par les points a et b^v; je puis considérer ces deux droites que j'appelle HR et VR, comme les deux traces d'un plan R qui contient la droite A, et dont l'intersection avec le plan P se déterminera par les moyens précédemment indiqués; I^h et I^v sont les deux projections de cette intersection; I^h rencontre A^h en un point m^h qui, par le fait seul que ces deux droites sont situées dans le même plan R, est en effet la projection horizontale du point de rencontre cherché; m^v par la même raison en est la projection verticale; et une vérification de l'exactitude des constructions se présente en ce que les deux points m^h et m^v doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

181. C'est en cette vérification que consiste l'avantage de l'emploi d'un plan auxiliaire R assujetti à la seule condition de con-

tenir la droite donnée ; mais, en prenant, pour plan auxiliaire, l'un des plans projetants de la droite, on arrive à simplifier d'une manière remarquable les constructions, ainsi qu'on peut le reconnaître sur la figure 2 construite avec les mêmes données.

A^h et A^v étant toujours les projections de la droite A, nous savons que le plan qui la projette sur le plan horizontal a pour traces la projection A^h elle-même et la perpendiculaire VR à la ligne de terre ; l'intersection des deux plans est la droite I dont la projection horizontale I^h se confond aussi avec A^h, et le point m se trouve déterminé par le seul point m^v de rencontre entre A^v et I^v ; on obtient son autre projection m^h en mettant m^v en projection horizontale sur I^h ; les constructions sont ainsi plus simples, mais les deux projections du point m ne sont plus individuellement déterminées, et la vérification que cette connaissance individuelle nous offrait, n'est plus ici qu'un moyen de construction.

182. La figure 3 n'est que la reproduction de la solution réalisée dans la figure 1 en choisissant le point r à l'infini ; alors les deux traces du plan auxiliaire, passant toujours respectivement par les deux traces a et b^o de la droite, sont parallèles à la ligne de terre, ce qui exprime que le plan auxiliaire lui-même est assujetti à cette condition de parallélisme. Il sera quelquefois commode d'avoir recours à un pareil choix quand les traces données feront des angles presque droits avec la ligne de terre.

183. En traitant de la méthode générale des changements de plan et de celle des mouvements de rotation, nous avons implicitement résolu le problème qui nous occupe par chacune de ces méthodes ; cette solution ne saurait donc présenter pour nous aucun intérêt nouveau, mais ne fût-ce que pour isoler sur une même figure les seules constructions qu'elle exige, et pour permettre au lecteur d'y recourir au besoin, nous avons encore consacré à ces constructions les deux figures de la Planche XXXIX, qui n'exigent chacune qu'un petit nombre de lignes.

Par l'une et l'autre méthode, on cherche à remplacer les données générales par une disposition particulière de ces don-

nées, telle que le point d'intersection, dans cette nouvelle disposition, soit écrit sur l'épure même ; il est facile de reconnaître qu'il suffit pour cela d'un seul changement de plan ou d'un seul mouvement de rotation ; car si le plan donné était perpendiculaire à l'un des plans de projection, on sait que tout ce qui y est contenu se projetterait suivant sa trace sur ce plan, et le point d'intersection cherché ne serait autre chose que celui dont la projection est à la rencontre de la projection de la droite et de la *projection* du plan ; il n'est ici nullement nécessaire d'avoir recours à des plans auxiliaires.

HP et VP, figure 1, sont les deux traces du plan ; A^h, A^v, les deux projections de la droite ; pour remplacer l'un des plans de projection, le plan vertical, par exemple, par un nouveau plan perpendiculaire au plan donné, il suffit de choisir sur le plan horizontal une nouvelle ligne de terre L'T' perpendiculaire à HP. La considération d'une horizontale du plan P' fait trouver immédiatement V'P, et $A^{v'}$ se détermine comme nous avons appris à le faire à l'aide de deux points de la droite A. $m^{v'}$ est le point de rencontre de $A^{v'}$ et de V'P ; c'est, sur le plan V', la projection du point de rencontre m dont on trouve l'autre projection en mettant $m^{v'}$ en projection horizontale sur A^h, en m^h, qu'il suffit ensuite de mettre en projection verticale sur A^v.

184. La figure 2 est consacrée aux mêmes données ; et, pour amener le plan P à devenir perpendiculaire au plan vertical, il faut le faire tourner autour de l'axe vertical Z^v, qui se projette horizontalement sur le point Z^h ; nous avons, pour plus de simplicité, choisi pour cet axe une verticale passant par l'un des points de la droite A. La figure indique comment il faut faire tourner la trace horizontale donnée HP de manière à la rendre perpendiculaire à la ligne de terre, et comment, par la considération d'une horizontale de ce plan, on détermine le point en lequel il est percé par l'axe, et par suite la nouvelle trace verticale VP' qui est aussi le lieu des projections de tous les points de ce plan. Faisant ensuite tourner la droite A de la même quantité angulaire α, on trouve ses deux nouvelles projections A'^h et A'^v, cette dernière rencontrant la projection du plan en m'^v qui, mis en projection horizontale sur A'^h, donne m'^h

pour l'autre projection du point de rencontre cherché après la rotation. Un simple mouvement de rotation en sens contraire et du même angle α, fixe les réelles positions des projections du point m; et, comme vérification, ces projections doivent se trouver sur les projections primitives de la droite A.

Ces deux dernières solutions, quoique moins simples que celles que nous avions données en premier lieu lorsqu'il s'agit de déterminer isolément le point de rencontre d'un point donné avec un plan donné, deviennent au contraire d'une utilité pratique incontestable, lorsqu'il faut trouver les intersections par un même plan, d'une série de droites parallèles, ou d'une série de droites émanant d'un même point, parce que l'on peut effectuer à la fois la même opération sur toutes les données de la question; une seule application suffira pour faire comprendre cet avantage.

II. INTERSECTION DE TROIS DROITES PARALLÈLES PAR UN PLAN.

185. Soient A, B, C, planche XL, trois droites parallèles, dont les traces horizontales respectives sont en a, b, c, proposons-nous de déterminer les points d'intersection de ces trois droites avec un plan unique P, connu par ses traces HP et VP.

Pour appliquer la solution par la méthode des changements de plan, nous prendrons une nouvelle ligne de terre L'T', perpendiculaire à HP, et nous déterminerons la nouvelle trace V'P du plan P qui est alors perpendiculaire au nouveau plan V' de projection, qui a remplacé le plan primitif V.

Les projections des trois droites données étaient parallèles sur le plan V, elles le seront encore sur le plan V' et il suffira de déterminer la direction commune pour l'une d'elles; les traces horizontales avaient pour projections verticales respectives, a^v, b^v, c^v sur la ligne de terre LT; les nouvelles projections verticales $a^{v'}$, $b^{v'}$, $c^{v'}$ s'obtiendront en abaissant, des mêmes points, des perpendiculaires sur la nouvelle ligne de terre L'T'.

Pour connaître $A^{v'}$, par exemple, il suffira de déterminer un nouveau point de cette droite, à l'aide de la projection horizontale d'un autre de ses points, de sa trace verticale par exemple. Les autres projections $B^{v'}$, $C^{v'}$, devant être parallèles

à $A^{v'}$ se trouvent par cela même déterminées en menant ces parallèles à l'équerre par les points $b^{v'}$, $c^{v'}$, etc., etc.

$A^{v'}$ rencontre V'P en $m^{v'}$, $B^{v'}$ et $C^{v'}$ en $n^{v'}$ et $o^{v'}$, et il suffit de mettre ces points $m^{v'}$, $n^{v'}$, $o^{v'}$, en projection horizontale sur A^h, B^h, C^h, pour avoir immédiatement en m^h, n^h, o^h les projections cherchées des points de rencontre respectifs des trois droites données avec le plan P ; ces points seront complétement déterminés en les mettant respectivement en projection verticale, en m^v, n^v, o^v sur A^v, B^v, C^v.

L'examen un peu attentif des deux figures de la Planche XXXIX justifiera suffisamment la préférence que nous avons donnée, dans cette solution, à la méthode des changements de plan qui est de beaucoup la plus simple dans ce cas ; nous en ferons un constant usage.

186. Remarque. Les trois droites parallèles A, B, C, peuvent être considérées comme les trois arêtes d'un prisme triangulaire, dont *abc* est la base ; le triangle $m^h n^h o^h$ est alors la projection horizontale de la section faite dans ce prisme par le plan P.

Si nous considérons, pour un instant, le plan de la face qui passe par le côté *ab* de la base, cette droite *ab* elle-même sera la trace de ce plan sur le plan horizontal, et le point *p*, en lequel se rencontrent les deux traces, sera nécessairement un des points de la projection de l'intersection qui n'est autre chose que la droite $m^h n^h$; donc $m^h n^h$ passe nécessairement par le point *p*, et c'est là une vérification que nous aurons ultérieurement à invoquer dans bien des circonstances.

187. La solution du problème qui précède nous conduit naturellement à porter notre attention sur le complément même de ce problème. Si l'on avait dans les arts à construire matériellement le prisme que nous venons de considérer, terminé d'une part par la base horizontale *abc*, et de l'autre par la section *mno* faite dans ce prisme par le plan P, il serait très-intéressant de connaître en vraie grandeur cette section, qui pourra nous être indifféremment fournie par la méthode des changements de plan ou celle des mouvement de rotation.

La section *mno* est tout entière contenue dans le plan P et se

projette sur le plan V′ suivant la trace V′P, que l'on peut considérer comme la projection de tout ce qui est contenu dans ce plan. La ligne de terre est L′T′ et le plan P est perpendiculaire au plan V′; il peut par conséquent être pris lui-même pour nouveau plan de projection simultanément avec le plan V′; V′P sera alors la nouvelle ligne de terre L″T″; on élèvera, par les points $m^{v'}$, $n^{v'}$, $o^{v'}$, les perpendiculaires $m^{v'}m^{h''}$, $n^{v'}n^{h''}$, $o^{v'}o^{h''}$, à cette seconde ligne de terre; on prendra sur ces lignes des longueurs respectivement égales à μm^h, νn^h, oo^h, et le triangle $m^{h''}\ n^{h''}\ o^{h''}$ sera la section cherchée en vraie grandeur.

Si l'on désire au contraire arriver à cette détermination par la méthode des mouvements de rotation, on fera tourner le plan P et tout ce qu'il contient autour d'un axe perpendiculaire au plan V′, autour de la trace HP par exemple, jusqu'à ce qu'il vienne se rabattre sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chacun des points m, n, o, décrira une circonférence qui se projettera horizontalement, suivant les droites $m^h m'^h$, $n^h n'^h$, $o^h o'^h$, et verticalement suivant les circonférences $m^{v'}m'^{v'}$, $n^{v'}n'^{v'}$, $o^{v'}o'^{v'}$, et les points m'^h, n'^h, o'^h s'obtiendront en mettant les trois points m'^v, $n'^{v'}$ $o'^{v'}$, en projection horizontale; la section cherchée sera en vraie grandeur $m'^h\ n'^h\ o'^h$.

188. Remarque. Que l'on emploie l'une ou l'autre méthode pour trouver la section en vraie grandeur, il se présente une vérification analogue à celle que nous avons indiquée (**186**).

Si l'on a opéré par la méthode des changements de plan, le point p que nous avons déjà eu à considérer, et qui appartient à la fois au plan horizontal et au plan coupant P, ayant pour projection verticale $p^{v'}$, on obtiendra sa nouvelle position $p^{h''}$ en élevant par $p^{v'}$ une perpendiculaire à L″T″ et en prenant $p^{v'}p^{h''} = pp^{v'}$; et comme les trois points p, m^h, n^h, sont, ainsi que nous l'avons vu déjà, en ligne droite, il en sera de même des trois points $p^{h''}$, $m^{h''}$, $n^{h''}$, car la ligne qui joint ces points n'est autre chose qu'une nouvelle position de la ligne droite pmn.

La même observation s'applique aussi facilement à la solution par le mouvement de rotation autour de l'axe horizontal HP; le point p placé sur cet axe ne se déplace pas dans ce mouvement, et les trois points p', m', n', sont nécessairement en ligne droite, en telle sorte que les trois droites ab, $m^h\ n^h$, $m'\ n'$, se coupent

en un même point p de la trace horizontale du plan coupant*.

189. Ces observations sont applicables, quelle que soit la distance des points a et b, et par conséquent aussi lorsque ces points sont infiniment voisins, en telle sorte que si ces points appartiennent à une courbe quelconque C, elles seraient encore vraies par rapport à la tangente à cette courbe, qui n'est que l'élément linéaire prolongé; nous reviendrons sur cette considération importante, lorsque nous aurons à nous occuper des tangentes aux sections cylindriques et coniques.

III. INTERSECTION DE TROIS DROITES, CONCOURANT EN UN MÊME POINT.

190. Ce problème, qui offre avec le précédent la plus grande analogie, doit être considéré comme le point de départ de tous ceux qui sont relatifs aux sections coniques : la pyramide est au cône ce que le prisme est au cylindre : remplacez dans un prisme ou dans une pyramide la base polygonale par une courbe, c'est-à-dire par un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits, et vous reproduirez, par cette seule modification, toutes les variétés des cylindres et des cônes.

C'est encore par la méthode des changements de plan que nous chercherons à déterminer la section faite dans une pyramide triangulaire par un plan quelconque P; le sommet de la pyramide, c'est le point de concours s des trois droites données A, B, C, dont les traces horizontales sont a, b, c (Pl. XLI). Les trois arêtes seront alors représentées en projection horizontale par $s^h a$, $s^h b$, $s^h c$, et, en projection verticale, par $s^v a^v$, $s^v b^v$, $s^v c^v$; quelle est la section faite dans cette pyramide par le plan P, représenté par ses traces HP et VP?

---

* Conformément aux règles générales que nous avons données pour la notation, nous avons exprimé sur l'épure que les points $p^{h''}$ $m^{h''}$ $n^{h''}$, $o^{h''}$, sont dans le plan de projection H'', en soulignant par un double trait leurs symboles, et nous avons également exprimé que les points m', n', o', sont dans le plan primitif de projection H, et n'accompagnant ces lettres d'aucun exposant.

A l'aide d'une nouvelle ligne de terre L'T' perpendiculaire à HP, nous définissons, comme précédemment, un nouveau plan de projection V', perpendiculaire à P, et sur lequel le plan P est représenté par une droite V'P, que nous savons construire, et qui est à la fois sa trace et sa projection. $a^{v'}$, $b^{v'}$, $c^{v'}$ sont les projections sur le plan de projection V', des trois points a, b, c; celle du point s se détermine facilement en $s^{v'}$; les trois données sont représentées sur ce plan V' par leurs trois projections $A^{v'}$, $B^{v'}$, $C^{v'}$, qui rencontrent celle du plan P en $m^{v'}$, $n^{v'}$, $o^{v'}$, et ce sont ces trois points qu'il faut mettre en projection horizontale sur A^h, B^h, C^h, pour obtenir les projections horizontales des trois sommets de la section cherchée, qui se trouve ainsi projetée en m^h, n^h, o^h; ces mêmes points mis en projection verticale sur A^v, B^v, C^v, donnent respectivement m^v, n^v, o^v, qui complètent la détermination de la section par la connaissance de sa projection verticale.

Pour obtenir la section en vraie grandeur, les opérations sont absolument les mêmes que celles de la Planche LX; les mêmes raisonnements sont également applicables, les mêmes vérifications subsistent, et il serait tout à fait superflu de présenter à nouveau sur les mêmes lettres les mêmes considérations : le lecteur voudra bien y suppléer, en se reportant à la solution du problème précédent.

191. Observation. Les opérations que nous venons d'effectuer, d'abord pour trois droites parallèles, ensuite pour trois droites concourant à un même point, seraient absolument les mêmes si l'on avait à opérer sur un plus grand nombre de droites, par exemple sur les génératrices d'un cylindre ou d'un cône, en si grande quantité que l'on voudra.

CHAPITRE III.

INTERSECTIONS DES SURFACES COURBES PAR DES PLANS.

192. Nous avons vu déjà comment quelques surfaces fort usitées dans les arts peuvent être représentées en géométrie descriptive ; nous aurons à revenir sur ces considérations, au fur et à mesure que nous énumérerons les différents ordres de surfaces, mais nous ne saurions tout d'abord trop insister sur ce point, que leur représentation exige impérieusement que l'on connaisse le mode géométrique de leur génération. Il ne saurait être ici question de surfaces irrégulières, telles par exemple que la surface d'un sol plus ou moins accidenté, dont les moyens graphiques ne peuvent donner une image exacte que par approximation, mais seulement de ces surfaces que l'on peut en quelque sorte appeler géométriques, et particulièrement de celles qui sont le plus généralement employées, ou même des différents assemblages que l'on peut concevoir de ces différentes surfaces.

Nous nous bornerons même, dans ce traité élémentaire, aux surfaces cylindriques, aux surfaces coniques et aux surfaces de révolution, engendrées, non pas à l'aide de directrices quelconques, mais à l'aide d'éléments que nous choisirons toujours parmi les courbes du second degré.

I. INTERSECTION D'UN CYLINDRE PAR UN PLAN.

193. On est dans l'habitude, dans les traités élémentaires de géométrie descriptive, de ne donner la solution du problème qui nous occupe que dans quelques cas particuliers auxquels cependant les moyens que nous avons empruntés aux méthodes générales des changements de plan et des mouvements de rotation, nous permettront de ramener les données les plus générales.

Nous commencerons par aborder le cas le plus simple, celui

d'un cylindre droit à base circulaire, dont l'axe est verticalement placé, et nous le couperons par un plan perpendiculaire au plan vertical.

Un tel cylindre est représenté horizontalement par sa trace, qui sera dans notre Planche XLIII la circonférence C^h qui se projette verticalement en C^v sur la ligne de terre, et verticalement par l'ensemble de ses génératrices verticales dont les deux extrêmes sont représentées sur le dessin en G^v et G'^v. Le plan donné sera le plan P déterminé par ses deux traces HP et VP.

Aucune opération ne serait à effectuer s'il s'agissait simplement de déterminer les projections de la section faite dans le cylindre par le plan, car d'une part tout ce qui est contenu dans le plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, se projette verticalement suivant sa trace VP, et de l'autre, tout ce qui est contenu sur la surface cylindrique se trouvant projeté sur le plan horizontal par les génératrices verticales elles-mêmes, la section cherchée ne saurait avoir d'autre projection horizontale que la circonférence C^h. Soit S cette section, nous exprimerons cette double circonstance en écrivant S^h sur C^h et S^v sur VP.

Quant à la détermination de la courbe S en vraie grandeur, qu'il peut être très-important de savoir faire, nous pouvons indifféremment y arriver, soit par la méthode des changements de plan, soit par la méthode des mouvements de rotation, dans des conditions absolument semblables à celles que nous avons rencontrées dans l'épure de la Planche XLI, que l'on fera bien de ne pas perdre de vue et de comparer avec celle qui nous occupe.

Par la méthode des changements de plan, il faut prendre, pour nouveau plan de projection, le plan sécant lui-même, ce qui peut immédiatement être fait puisque ce plan est perpendiculaire au plan vertical de projection avec lequel il peut être employé simultanément. La nouvelle ligne de terre L'T' sera la trace VP elle-même ; mais pour ne pas sortir du cadre du dessin nous conviendrons, comme il est souvent utile de le faire, d'affecter la partie supérieure du dessin à la partie antérieure du plan horizontal, ce qui nous oblige à écrire renversées les lettres L' et T' sur l'épure. Considérons en particulier le point m de la section, qui se trouve projeté en m^h et m^v ; pour avoir sa

nouvelle projection $m^{h'}$, il suffira, comme nous l'avons déjà fait tant de fois, d'élever par m^v une perpendiculaire à la ligne de terre L'T', et de prendre *au-dessus* de cette ligne, $m^v\, m^{h'} = pm^h$.

En opérant ainsi pour un très-grand nombre de points tels que m, on se procurera autant de points que l'on voudra de la section en vraie grandeur, et il suffira de joindre, par un trait continu, ces points pour obtenir, avec autant d'exactitude qu'on l'aura désiré, la courbe $S^{h'}$.

194. Dans notre figure, la série d'opérations que nous venons de parcourir a été effectuée pour huit points seulement et sans nous préoccuper de la question de savoir s'il ne serait possible d'obtenir directement la grandeur des axes de cette section que nous savons à priori être une ellipse, nous dirons seulement comment on pourra construire la tangente en un point quelconque de la courbe $S^{h'}$, qui aurait été déterminé comme nous l'avons indiqué. Soit $n^{h'}$ qui correspond à n^h, le point en lequel nous voulons obtenir la tangente ; c'est le lieu de se rappeler ce que nous avons dit (**188**) de la droite $p^{h''}\, m^{h''}\, n^{h''}$ par rapport à la droite pmn ; $p\theta$ étant la tangente en n à C, c'est-à-dire la droite qui passe par les deux points successifs de la circonférence C^h en n^h, $n^{h'}p^{h'}$ sera la ligne qui joindra les deux points successifs de la section $S^{h'}$ au point $n^{h'}$, c'est-à-dire la tangente en ce point. Il suffira donc d'élever en p^v la perpendiculaire $p^v p^{h'}$ à L'T' ; de prendre sur cette perpendiculaire une longueur $p^{h'}\, p^v = p^h\, p^v$, puis de joindre $p^{h'}$ à $n^{h'}$ qui correspond à n^h pour obtenir la tangente cherchée.

195. Si l'on veut obtenir la section en vraie grandeur par la méthode des mouvements de rotation, il suffit d'effectuer cette rotation autour de HP, comme axe, de manière à rabattre le plan P et la courbe S qu'il contient sur le plan horizontal. Le point n de cette courbe qui a pour projection n^h et n^v décrira une circonférence qui se projettera verticalement en D^v et horizontalement suivant la parallèle D^h à la ligne de terre ; et les nouvelles projections n'^v et n'^h se trouveront ainsi déterminées, de telle manière que l'on pourra obtenir la courbe S' qui, si les opérations ont été bien effectuées, doit être identique avec la courbe $S^{h'}$. Quant à la tangente au point n, la comparai-

son avec l'épure de la Planche XL nous apprend que le point p^h n'a pas varié de position, et qu'il suffit pour obtenir la tangente de joindre p^h à n'^h.

196. La solution que nous venons de présenter pour le cas particulier dans lequel nous nous sommes placés, est tout à fait suffisante pour déterminer la section du cylindre par un plan dans le cas le plus général ; nous supposerons seulement que le cylindre est donné par sa trace sur le plan horizontal et la direction de ses génératrices ; si au lieu de connaître sa trace horizontale, les données de la question comprenaient une directrice quelconque, nous savons déterminer avec facilité cette trace horizontale, puisqu'elle est le *lieu* des traces horizontales des diverses génératrices droites de la surface cylindriquer.

Soit donc C cette trace que nous supposerons être une circonférence (elle pourrait être tout aussi bien une courbe quelconque) et G^h, G^v, les projections d'une génératrice, nous rechercherons, en projection et en vraie grandeur, la section faite dans le cylindre par le plan P, connu par ses traces HP et VP.

Pour obtenir un plan de projection perpendiculaire au plan donné, nous adopterons une nouvelle ligne de terre L'T', perpendiculaire à la trace HP, et nous déterminerons la nouvelle trace V'P du plan P sur le nouveau plan de projection V'; puis, nous chercherons, par les moyens ordinaires de la méthode des changements de plan, absolument comme il a été fait pour les trois droites parallèles de la figure 41, quelles sont, sur ce nouveau plan, les nouvelles projections d'un certain nombre de génératrices. La génératrice par exemple, dont les projections primitives étaient G^h et G^v, aura pour nouveau système de projection G^h et $G^{v'}$, et, la direction de l'une de ces génératrices étant déterminée, quant à sa projection sur le nouveau plan V', la connaissance de cette direction servira à tracer toutes les autres, celle qui est relative au point m, par exemple, par la seule détermination du point $m^{v'}$, que l'on obtient en mettant m^h en projection verticale sur L'T'.

Tout ce qui est contenu dans le plan P est maintenant représenté sur le plan V' par la trace V'P de ce plan, qui peut en être considérée comme la projection; par conséquent, le point

en lequel la nouvelle projection de chacune des génératrices viendra rencontrer cette trace sera la projection d'un des points de la courbe cherchée, et il suffira pour chacun d'eux de la mettre en projection horizontale sur la génératrice correspondante pour obtenir tous les points de la courbe S^h, qui se trouvera ainsi tracée par points, à l'aide desquels on remontera facilement à la projection S^v de cette même courbe d'intersection sur le premier plan vertical V de projection.

Faisant, pour un instant, abstraction de cette projection verticale S^v, les nouvelles données de la question seront désormais celles-ci, par rapport aux deux plans de projection définis par la ligne de terre L'T' : une courbe S de l'espace, contenue dans un plan P, perpendiculaire à l'un des plans de projection, étant donnée par ses deux projections S^h et S^v, déterminer cette courbe en vraie grandeur? La question, ainsi posée, est déjà résolue, en ce que nous savons appliquer à sa recherche, identiquement comme nous l'avons fait dans l'épure 40, où il s'agissait seulement de trois droites parallèles, soit la méthode des changements de plan, qui nous fournira $S^{h''}$, soit la méthode des mouvements de rotation, qui nous conduira à la courbe identique S^v; suivant les dimensions du cadre dans lequel les constructions graphiques doivent être restreintes, on se servira de l'une ou de l'autre de ces solutions, qui permettent d'ailleurs de rester toujours dans les limites du dessin, en choisissant convenablement la position, soit de la troisième ligne de terre L''T'', dont la direction seule n'est pas arbitraire, soit l'axe de rotation, qui n'est, dans le cas actuel, assujetti à d'autre condition qu'à être parallèle à la droite HP, trace horizontale primitive du plan donné.

Lorsque, pour pouvoir tracer les différentes courbes avec autant de précision que les procédés graphiques le comportent, on voudra s'aider de la considération des tangentes, on sait que les trois tangentes en a, m^h, m' doivent se couper en un même point p de la trace HP; ayant donc tracé, par les procédés de la géométrie ordinaire, la tangente au point a à la trace du cylindre sur le plan P (ce qui peut s'effectuer avec toute l'exactitude désirable, lorsque cette trace est une des courbes du second degré, comme nous l'avons supposé), on connaîtra le point p, d'où devront émaner les deux tangentes à la courbe

d'intersection en projection horizontale S^h sur le plan primitif H, et à son rabattement S' sur le même plan, après le mouvement de rotation effectué pour obtenir la courbe en vraie grandeur.

Quant au point $p^{h''}$, qu'il est nécessaire d'obtenir pour construire la tangente au point $m^{h''}$, il est inutile de répéter que l'on doit avoir $p^{v'}p = p^{v'}p^{h''}$; en un mot, toutes les considérations qui ont été présentées à l'occasion de la Planche XL peuvent être ici reproduites, sans aucune autre observation que ce qui avait été dit pour la droite *ab*, qui joignait, dans cette épure, les deux points *a* et *b* de la trace donnée, et doit s'appliquer à l'élément rectiligne *m* des courbes que l'on a maintenant à considérer, cet élément rectiligne prolongé étant pour nous, par définition, la tangente au point *m*.

197. Résumant ce qui vient d'être dit sur le problème qui nous occupe, nous voyons qu'il peut être résolu de la manière la plus générale à l'aide des seuls principes qui ont été présentés jusqu'ici, et qu'il n'y aurait eu aucune raison pour éloigner de ces éléments le problème de la section du cylindre par un plan, dans toute sa généralité; cette généralité même, ne peut qu'aider puissamment à l'intelligence de la solution, et il ne saurait être trop recommandé aux élèves de l'aborder sans crainte; si l'épure se trouve ainsi couverte d'un plus grand nombre de lignes, la question n'en est pas moins traitée par les mêmes considérations qu'elle exigerait encore, quoique restreinte à quelque cas particulier.

198. Dans ce qui précède, le plan P n'est assujetti à aucune relation particulière de position avec les génératrices du cylindre donné, mais il est une de ces positions qu'il est important de considérer, c'est la *section droite* de ce cylindre, c'est-à-dire la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices. C'est cette section que l'on obtiendra toutes les fois que, comme dans la Planche XLIII, les traces du plan P seront respectivement perpendiculaires aux génératrices du cylindre, l'épure, quoique construite pour cette position particulière du plan P, ne présenterait dans une autre circonstance aucune difficulté spéciale.

199. La section droite d'un cylindre présente un grand inté-

rêt lorsqu'il s'agit de faire le développement de ce cylindre, c'est-à-dire lorsqu'on veut étendre cette surface sur un plan, ce qui peut toujours se faire pour les cylindres et pour les cônes, sans aucune déchirure ni duplicature. La base d'un cylindre, en effet, devant être considérée comme un polygone d'un nombre infini de côtés, si l'on se représente, par la pensée, le prisme qui aurait pour base ce polygone que nous appellerons *a a' a''* ; *a*, *a' a''* étant les sommets successifs de ce polygone, les génératrices successives G G' G'' seront les arêtes des facettes planes successives qui composeront la surface prismatique, et cette image suffit pour faire comprendre que si la facette limitée par G et G' est tout d'abord étendue sur un plan, on pourra faire tourner la facette G' G'' autour de l'arête G', de manière à venir la rabattre sur le même plan; puis la troisième G'' G''' autour de G'' et ainsi de suite, jusqu'à ce que toute ces petites facettes soient venues se coucher les unes à côté des autres sur le même plan. Ce raisonnement subsiste, quelle que soit la grandeur des facettes, et par conséquent aussi lorsqu'on les suppose infiniment petites, c'est-à-dire lorsque le prisme est devenu cylindre, et la figure plane, que l'on obtient par le rabattement complet de toutes les génératrices successives, est ce que l'on appelle le développement du cylindre.

Le développement d'un cylindre est donc une sorte de patron plan, dont la figure est telle, qu'enroulée suivant la surface de ce cylindre, elle la recouvrirait tout entière; on conçoit de quelle utilité doit être pour les arts la connaissance de ce développement, puisque s'il s'agit par exemple d'exécuter un cylindre avec une matière flexible, du fer-blanc par exemple, il devient facile à priori de se procurer la forme exacte qu'il faudra donner à la feuille métallique pour reproduire tel cylindre que l'on devra obtenir.

200. La planche XLVI donne exactement ces développements pour les cylindres sur lesquels nous avons opéré dans nos planches XLII et XLIII. La figure 1 dont nous nous occuperons d'abord, donne la forme exacte du patron qui, appliqué sur le cylindre de la planche XLII, reproduirait la partie de ce cylindre comprise entre le plan horizontal de projection et le plan P.

En nous reportant à cette comparaison, qui nous a servi déjà,

des facettes successives d'un prisme infinitésimal, qui n'est autre chose que le cylindre, et sans nous inquiéter pour le moment de la partie supérieure de ces facettes, il est facile de voir que toutes les génératrices étant, dans l'exemple qui nous occupe, perpendiculaires au plan horizontal, elles sont, par cela même, perpendiculaires à chacun des côtés du polygone qui sert de base au cylindre, et que, par conséquent, les deux génératrices successives et le côté qu'elles comprennent, sont pour chacune des facettes une portion de quadrilatère rectangle qui ne sera aucunement déformé lors du développement, en telle sorte que les génératrices venant se placer les unes à côté des autres, parallèlement entre elles, les côtés successifs qui les relient ne cesseront pas de leur être perpendiculaires, et par conséquent viendront se placer suivant une seule et même ligne droite en $\alpha_1\,\omega_1$ perpendiculaire à la direction commune des génératrices, et que nous pouvons tout d'abord tracer sur notre fig. 1.

Soit α_1 le commencement de cette ligne, si nous remarquons que le point a^h peut être indifféremment considéré comme la projection horizontale du point a qui appartient à la section S et celle du point α qui, placé sur la même génératrice G, appartient à la base C du cylindre, et que si nous affectons des mêmes lettres avec indices les points correspondants du développement, nous pourrons représenter en $\alpha_1\,a_1$, sur une perpendiculaire à la droite arbitrairement tracée, la position de la génératrice $\alpha\,a$ dans le développement; une fois la première génératrice choisie dans ce développement, la position des autres génératrices n'est plus arbitraire et nous pouvons immédiatement nous reporter à celle du point n. La circonférence C qui est en vraie grandeur la base du cylindre, venant se développer sur la droite $\alpha_1\,\omega_1$, il est évident que le point n de cette base viendra se placer sur cette droite, à une distance $\alpha_1\,\nu_1$ égale à la longueur de l'arc $a^h\,n^h$, et que par conséquent, le point ν_1 sera parfaitement déterminé ainsi que la génératrice correspondante, qui est toujours une perpendiculaire à la droite $\alpha_1\,\omega_1$ du développement; la vraie grandeur de cette génératrice est encore mesurée sur l'épure XLII, par la distance $\nu^v\,n^v$ qu'il suffira par conséquent de porter de ν_1 en n_1 pour avoir la représentation dans le développement de la génératrice du point n. Il en sera de même pour toute autre génératrice, et

l'on pourra par conséquent déterminer avec une facilité pareille les extrémités a_1, n_1, m_1, de toutes les génératrices que l'on voudra dans le développement. Mais si au lieu de considérer des génératrices placées à des distances finies l'une de l'autre, on avait pu les considérer toutes, les extrémités de ces génératrices qui ne sont évidemment autre chose que le développement de la courbe d'intersection S, auraient formé une courbe continue qu'il ne nous est possible de tracer que par approximation, en joignant par un trait continu les extrémités des seules génératrices sur lesquelles nous ayons opéré comme nous venons de le dire. La courbe ainsi tracée ressemblera d'autant plus à la courbe réelle qu'elle aura été obtenue à l'aide d'un plus grand nombre de points, et cette courbe sera limitée par deux génératrices extrêmes qui ne seront autre chose que le dédoublement, pour ainsi dire, de la première génératrice sur laquelle on a opéré. La base à l'aide de laquelle le développement a été tracé, aura une longueur précisément égale à la longueur de la circonférence C, et la longueur du développement de la courbe sera en même temps égale à la longueur de la courbe S^{ν} que nous avons obtenue en vraie grandeur.

201. La considération de la tangente peut encore, d'ailleurs, nous venir en aide pour nous diriger dans le tracé de la courbe, au moyen d'un certain nombre de points isolés; s'agit-il, par exemple, de connaître dans le développement la tangente au point n_1, qui correspond au point n de l'intersection que l'on considère : en portant notre attention sur la tangente au point n, nous voyons que cette tangente est l'hypothénuse du triangle rectangle, dont la base est pn^h et dont la hauteur est $\nu^v n^v$, et lorsque l'élément rectiligne n de la base C viendra s'appliquer sur la droite $\alpha_1\,\omega_1$, l'élément correspondant de la courbe S, qui est contenu dans la même facette, se trouvera aussi dans le plan du développement, sans que ce triangle, dont nous venons de parler, se soit déformé en aucune façon. Mais nous avons déjà la portion $\nu^v n^v$ de la génératrice en vraie grandeur et en véritable position dans notre développement; il suffira donc de prendre la distance $\nu_1\pi_1$ égale à $n^h p$, de porter cette distance dans le sens convenable; puis, joignant le point π_1 au point n_1,

on aura reconstruit la direction de l'élément de la courbe en n_1, et par conséquent la tangente en ce point.

Pouvant opérer ainsi sur chacun des points de la courbe S développée, le dessinateur possède un moyen de s'assurer de l'exactitude de son patron, et de le rectifier au besoin par le tracé d'un certain nombre de tangentes.

202. Les mêmes raisonnements s'appliqueront avec une égale facilité au cylindre de l'épure XLIII, dont nous connaissons la section droite S.

Pour pouvoir effectuer le développement de la portion du cylindre de la planche XLIII comprise entre le plan horizontal et le plan P, il se présente d'abord une difficulté en ce que ce cylindre ayant ses génératrices obliques par rapport à la base C, il ne serait plus vrai de dire que cette base se développera suivant une ligne droite; ce que nous avons dit des facettes rectangulaires n'est plus vrai pour cette base C, et le développement ne peut plus s'effectuer qu'au moyen de la courbe S, dont le plan est, dans le cas particulier de la figure, perpendiculaire à la direction des génératrices; ce sont donc les arcs successifs de cette courbe, mesurés à partir d'un point fixe tel que a'^h, qu'il faut porter sur une droite indéfinie (fig. 2), pour obtenir dans le développement les points des différentes génératrices qui ont servi à la construction de la courbe de section; et pour avoir la longueur de ces génératrices elles-mêmes, il suffit d'observer qu'elles se trouvent projetées en vraie grandeur sur le plan V', et que c'est par conséquent dans les projections telles que $G^{v'}$ qu'il faut la chercher.

En ce qui concerne le point m, par exemple, on prendra l'arc $\alpha_1\mu_1 = a'm'$ et $\mu_1 m_1 = \mu^{v'} m^{v'}$; quant à la tangente en ce point m_1 elle s'obtiendra en prenant $\mu_1\pi_1 = m'p$; en un mot, les opérations sont identiquement les mêmes que dans le cas précédent, sous cette seule différence que la section droite est maintenant celle qui est faite par le plan P, et que la section oblique est déterminée par le plan horizontal de projection : les noms seuls des plans sécants ont été intervertis.

Observation. Dans l'un et l'autre développement que nous

venons d'effectuer, nous avons commencé par la génératrice la plus courte. La forme du patron aurait été changée si nous avions, au contraire, commencé par une autre, mais les mêmes considérations auraient conduit de la même manière à la forme du développement dans les nouvelles conditions.

II. SECTION PLANE DU CÔNE.

203. De même que l'épure de la planche XL nous a préparés à la détermination de la section plane du cylindre, de même aussi celle de la planche XLI nous fournira tous les éléments nécessaires pour construire la section faite dans un cône par un plan, et c'est à peine s'il sera nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les planches XLIV et XLV qui sont consacrées à cette question.

Dans la première de ces épures, le cône est, pour plus de simplicité, un cône droit à base circulaire C, dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, ce qui exige que la projection horizontale s^h de son sommet se confonde avec le centre du cercle qui lui sert de base; et le plan P qui détermine la section dans ce cône est perpendiculaire au plan vertical de projection.

La projection verticale de l'intersection est tout d'abord connue puisque cette courbe est dans le plan P, et qu'il résulte de la position particulière de ce plan que tout ce qui y est contenu, et par conséquent l'intersection cherchée, se projette verticalement sur sa trace verticale.

Pour obtenir la projection horizontale de cette intersection, il suffit de considérer isolément chaque génératrice, telle que G^h, G^v, menée d'un point quelconque μ de la base ou directrice C au sommet s du cône; cette génératrice G est rencontrée par le plan P en un point m qui se projette verticalement en m^v sur la trace VP, et dont on obtient l'autre projection en mettant m^v, qui appartient à G^v, en projection horizontale sur G^h.

On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de la projection horizontale de la courbe S, intersection cherchée; joignant ces points par un trait continu, on construira cette

projection horizontale, et la courbe S dans l'espace se trouvera parfaitement déterminée par la connaissance de ces deux projections.

Pour trouver cette section en vraie grandeur, on ne saurait dès lors rencontrer aucune difficulté spéciale ; la courbe sur laquelle on veut opérer est connue par ses deux projections; elle est contenue dans un plan perpendiculaire au plan vertical de projection; il suffit, par un mouvement de rotation ou par un changement de plan, d'amener sur l'épure même le plan qui la contient, et pour cela de disposer les constructions comme nous l'avons déjà fait fréquemment.

Observons toutefois que, dans cette recherche de la vraie grandeur de la courbe par la méthode des changements de plan, si nous avions comme précédemment pris pour nouvelle ligne de terre L'T' la trace VP elle-même, les constructions seraient sorties de notre cadre, et que nous avons été forcés de prendre cette ligne de terre L'T' plus rapprochée du milieu du papier pour éviter cet inconvénient.

Dans la solution par un mouvement de rotation, l'exiguïté du cadre a également exigé qu'au lieu de prendre pour axe la droite HP, nous eussions recours à un autre axe Z^h qui lui est parallèle et qui passe par le point Z^v de la trace VP.

Le cylindre, avons-nous dit, peut être considéré comme un prisme infinitésimal, à facettes rectangulaires infiniment étroites, et de là nous avons conclu comment on pouvait construire la tangente en un point de la section plane du cylindre, comment aussi il fallait opérer pour obtenir le développement d'une portion limitée de cette surface; les mêmes considérations sont applicables au cône avec de légères modifications.

204. Quant à la tangente, elle est pour le cône comme pour le cylindre le prolongement de l'élément linéaire de la courbe, et le point p joue ici le même rôle que dans la figure 41; ce point p étant déterminé par la rencontre de la tangente T^h au point μ de la directrice C avec la trace HP du plan sécant, c'est par ce même point que passera la tangente en m^h à la courbe S^h.

Pour obtenir les tangentes aux courbes construites en vraie grandeur sur l'épure, il sera nécessaire d'avoir égard soit à la position nouvelle de la ligne de terre L'T', soit à la position nou-

velle de l'axe de rotation : ainsi $op^{h'}$ sera pris égal à pp'' dans le premier cas, et dans le second le point (p, p'') comme tous les autres points que l'on a eu à considérer dans le plan P, devra tourner autour de l'axe de rotation Z jusqu'à ce que ce plan soit devenu parallèle au plan horizontal.

205. La base du cône, la circonférence C de notre planche XLIV comme toute autre courbe, est formée, ainsi que nous en sommes convenus, d'une suite d'éléments rectilignes ; joignons par deux génératrices les extrémités d'un de ces éléments au sommet, nous aurons une facette triangulaire qui, par raison de symétrie dans un cône droit, sera composée d'un triangle isocèle, les deux génératrices étant également inclinées sur l'élément rectiligne de la courbe ; cette facette triangulaire étant placée sur un plan, on conçoit que la facette *successive*, en tournant autour de la génératrice commune, puisse venir s'appliquer sur le même plan, puis la suivante et toutes les autres, de manière à couvrir non plus l'espace compris entre deux parallèles extrêmes, comme dans le cylindre, mais la totalité de l'espace angulaire compris entre les deux droites extrêmes, divergeant à partir d'un point unique pour toutes, et qui sera la représentation du sommet du cône.

Mais de ce que toutes les arêtes des facettes dont nous venons de parler sont également inclinées sur les bases, il s'ensuit que celles-ci seront placées comme les cordes d'une circonférence lorsqu'on viendra, comme pour le cylindre, à ne plus considérer que des facettes infiniment petites.

Cela posé, rien n'est plus simple que de procéder au développement d'un cône droit tel que celui que nous avons à considérer dans la planche XLIV ; la circonférence qui lui sert de base se développera suivant une autre circonférence dont le rayon sera la longueur commune des génératrices ; en telle sorte que si s_1, planche XLVII, est le point en lequel on place le sommet du cône pour en opérer le développement, la première génératrice étant placée en s_1b_1, la circonférence C se développera sur la circonférence C_1, de manière que la portion de cette circonférence occupée par le développement soit égale à la circonférence C tout entière, et le cône tout entier sera développé suivant le patron $\beta_1\mu_1\beta'_1$.

Mais quelle sera la portion de cette figure qui représentera la partie conique détachée du cône total par le plan sécant P? Il suffit, pour le savoir, d'affecter la ligne $\sigma\rho$ à la représentation d'une génératrice particulière I^t, à celle, par exemple, qui se trouve projetée en I^h, I^v, planche XLIV. La portion de cette génératrice qui appartient au cône supérieur a pour longueur $s^v a^v$ que nous porterons de s_1 en b_1; b_1 sera déjà un point du patron cherché; nous opérerons de la même façon pour chacune des génératrices du cône, la génératrice G entre autres, limitée au point m, sera portée de s_1 en m_1, de manière que $s_1 m_1$ égale la vraie grandeur de la partie sm de cette génératrice que nous connaîtrons en $s^v n^v$. Il en serait de même pour tout autre point, et nous construirons de cette manière le patron $b_1 m_1 a_1$ qui enroulé sur le cône en couvrirait exactement la partie supérieure; nous aurions obtenu le patron $s_1 a'_1 b'_1$ si, au lieu de commencer par la génératrice du point b nous avions voulu représenter en $s_1 a'_1$ la génératrice du point a.

Reste encore à déterminer la tangente au point m_1, par exemple; il nous suffira de reproduire à cet égard ce que nous avons dit déjà pour le cylindre; lorsque nous développerons le cône, le triangle $p\mu m$ de l'espace, qui n'est qu'une portion du plan de la facette infiniment petite au point m ou au point μ, se rabattra sur le plan du développement comme cette facette elle-même, et sans que la droite mp, dans cette nouvelle position, cesse d'être le prolongement de l'élément rectiligne de la courbe S; il en sera de même pour la ligne μp : la première restera tangente au développement $a_1 b_1$ de la courbe S, la dernière étant toujours tangente au développement $\alpha_1 \beta_1$ de la circonférence C. Pour reproduire dans le développement le triangle $m\mu p$ de l'espace, il suffira donc de mener la tangente $\mu_1 p_1$ à la circonférence c_1, de prendre sur cette circonférence une longueur égale à μp qui se trouve projetée en vraie grandeur sur la planche XLIV, de joindre le point p_1 au point m_1; la droite $p_1 m_1$ sera la tangente cherchée.

La même construction a été effectuée sur la figure pour la tangente au point m'_1 de la courbe S'_1, obtenue en partant de la génératrice du point b.

Observation. L'ouverture de l'angle $\beta_1 s_1 \beta_1$, pour un cône droit

à base circulaire, dépend uniquement de l'angle que les génératrices font avec l'axe, c'est-à-dire de l'*ouverture* plus ou moins grande du cône.

Si cet angle est de 90°, le cône se réduit à un plan et l'angle $\beta_1 s_1 \beta_1$ est de 360°, c'est-à-dire que le développement n'est autre chose que le plan lui-même que nous pouvons considérer comme engendré par le mode de génération conique.

Si nous imaginons une série de cônes ayant tous même base, et dont le sommet s'éloigne de plus en plus du plan de cette base, la différence de rayon entre la circonférence C et la circonférence C_1 augmentera continuellement, et par conséquent le développement de C n'occupera sur C_1 qu'une portion relativement plus petite de cette circonférence; l'angle $\beta_1 s_1 \beta_1$ ira constamment en diminuant.

Enfin, si l'on conçoit que le sommet s du cône soit rejeté à l'infini, le développement de C n'occupera qu'une portion infiniment petite de la circonférence de rayon infini C_1, les deux droites $s_1\beta_1$, $s_1\beta'_1$ seront parallèles, et on arrive ainsi à la limite, à la forme rectangulaire du développement cylindrique.

Sous quelque point de vue qu'on les envisage, les propriétés du plan et celles du cylindre peuvent toujours être déduites de celles d'un cône droit dont le sommet est placé à une distance nulle ou à une distance infinie de la base.

206. Nous n'avons rien à ajouter aux considérations précédentes, relativement à la planche XLV qui renferme la construction de la section faite dans un cône oblique par un plan dirigé d'une manière quelconque. Ce problème général, par un simple changement de plan, se trouve immédiatement ramené au cas particulier dans lequel le plan donné est perpendiculaire à l'un des plans de projection; c'est à cette condition que conduit l'emploi d'une nouvelle ligne de terre L'T' perpendiculaire à la trace HP du plan donné; la section cherchée est alors projetée sur le nouveau plan vertical suivant sa trace même et les opérations se continuent comme précédemment : connaissant $S^{v'}$, on en déduit S^h en mettant ses différents points en projection horizontale sur les génératrices correspondantes et l'on remonte de la même façon à la projection verticale S^v. Quant à la courbe en vraie grandeur $\underline{\underline{S}}^{h''}$, elle a été construite sur l'épure, seulement

par la méthode des changements de plan, en employant une troisième ligne de terre L″T″.

Dans le cône droit à base circulaire, nous avons vu qu'il était possible, en n'invoquant que les seules considérations que nous avons mises en œuvre pour le cylindre, de construire le développement; ces considérations seraient impuissantes pour les autres surfaces coniques qui exigent, ainsi que nous le verrons plus tard, l'emploi d'une surface sphérique auxiliaire pour pouvoir être développées. Nous ne nous occuperons pas de cette question dans l'impossibilité où nous serions quant à présent de trouver la courbe qui tracée sur le cône, affecterait dans le développement une forme simple, comme celle par exemple de la section droite dans le cylindre, qui se développe suivant une droite, ou de la section perpendiculaire à l'axe dans le cône de notre planche XLIV, qui se développe suivant une circonférence de cercle.

III. INTERSECTION D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION PAR UN PLAN.

Notions préliminaires.

207. Lorsque dans les premières pages de ce traité, nous avons passé en revue les différentes surfaces courbes dont nous nous proposions de nous occuper, nous avons dit que la surface de révolution est celle qui se trouve engendrée par une génératrice droite ou courbe, en tournant autour d'un axe placé d'une manière quelconque dans l'espace.

Nous n'avons pu cependant indiquer suffisamment comment les surfaces de ce genre devaient être représentées en géométrie descriptive; mais maintenant que les méthodes générales des changements de plan et des mouvements de rotation nous sont devenues familières, nous savons parfaitement ramener le cas général d'un axe situé d'une manière arbitraire au cas particulier d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple. Cette substitution peut se faire toujours, soit par deux changements de plan, soit par deux mouvements de rotation; et quelle que soit la courbe donnée, nous savons également déduire les nouvelles projections de chacun de ces points, après ces opérations effectuées, et par

conséquent construire par points la représentation nouvelle de la courbe primitive.

Dans ce qui va suivre, nous pourrons donc, sans rien ôter à la généralité de nos déductions, ne considérer que des surfaces de révolution engendrées par un mouvement de rotation autour d'un axe vertical; et quant aux courbes génératrices elles-mêmes, nous nous bornerons, comme pour les cônes et pour les cylindres, à porter notre attention sur les courbes du second degré, tournant autour d'un de leurs axes de figure.

Avant d'aborder sur les surfaces de ce genre la détermination des sections planes, nous établirons en quelques mots, auxquels le lecteur aurait de lui-même suppléé, comment on peut reconnaître si un point m (pl. VII, fig. 4) appartient à la surface de révolution engendrée par la courbe C^h, C^v tournant autour de l'axe vertical A^h, A^v.

Dans le mouvement de rotation dont nous venons de parler, chaque point de la génératrice C décrira, ainsi que nous l'avons vu en traitant de la méthode des mouvements de rotation, une circonférence de cercle située dans un plan perpendiculaire à l'axe A et qui se projettera horizontalement en vraie grandeur suivant D^h, et verticalement suivant une droite D^v parallèle à la ligne de terre. La courbe D est ce qu'on appelle un *parallèle* de la surface, et l'on pourrait considérer une surface de révolution comme engendrée par un de ces *parallèles* qui se mouvrait parallèlement à lui-même, son centre toujours placé sur l'axe A et son rayon variant constamment, de manière à s'appuyer toujours sur la génératrice C.

Tout point m d'une surface de révolution doit donc être considéré comme situé sur un parallèle, dont la projection horizontale passe par la projection horizontale de ce point et dont la projection verticale passe de même par sa projection verticale. Soient donc m^h et m^v les deux projections du point m, il suffit de voir si la circonférence D^h et la ligne droite D^v peuvent être à la fois les deux projections d'un même parallèle de la surface; et ils ne sauraient l'être évidemment que si, prolongeant D^v jusqu'à la projection C^v de la génératrice en n^v, le point n mis en projection horizontale sur C^h se confondait avec un des points de C^h. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si elle est satisfaite, le point m appartient à un des parallèles de la surface

de révolution et par conséquent à la surface de révolution elle-même.

Section plane de la surface de révolution.

208. Soit maintenant (pl. XLVIII) un ellipsoïde de révolution représenté par l'ellipse C, dont les projections sont C^h et C^v, et un axe Z'_1, représenté en Z^h et Z^v, qui n'est autre chose que l'un des axes de figure de l'ellipse : ces deux éléments suffisent, ainsi que nous l'avons vu, pour définir complétement la surface de révolution, à la condition que le lecteur saura qu'il s'agit d'une surface engendrée par la rotation de la courbe C, autour de l'axe A. Pour prévenir autant que possible l'esprit, par un moyen graphique de cette circonstance, il arrive fréquemment que l'on représente le parallèle principal, celui qui correspond au second axe de la courbe génératrice, lorsqu'il s'agit d'une courbe du second degré, comme nous le supposerons toujours dans ces éléments ; ce parallèle que l'on appelle *équateur*, parce qu'il partage la surface en deux parties parfaitement symétriques, est ici représenté en projection horizontale par la circonférence E^h, et en projection verticale par la parallèle E^v à la ligne de terre.

La disposition de ces données n'ôte rien à la généralité des considérations qui vont suivre, car dès lors qu'il s'agit d'une surface de révolution provenant d'une courbe du second degré tournant autour de l'un de ses axes, on peut toujours amener cet axe à être perpendiculaire au plan horizontal de projection, et choisir ensuite le plan vertical de manière à ce qu'il soit parallèle à la courbe donnée.

Ces observations faites, proposons-nous de trouver en projection et en vraie grandeur la section faite dans une pareille surface par un plan P que nous choisirons d'abord perpendiculaire au plan vertical ; ses traces sont HP et VP, sur la planche XLVIII.

Une surface, lorsqu'il s'agit de déterminer son intersection avec une autre surface, doit être considérée comme composée d'une suite de lignes dont on cherche successivement les intersections avec la surface sécante. Lorsqu'il s'agit d'un plan sécant, il suffit donc de faire un bon choix de ces lignes appartenant à la surface pour obtenir immédiatement les points où elles sont

coupées par le plan, et cette opération est surtout facile lorsque le plan, comme dans l'exemple qui nous occupe, étant perpendiculaire à l'un des plans de projection, se trouve projeté avec tout ce qu'il renferme suivant une de ses traces. C'est ainsi que pour construire les sections planes du cylindre et du cône, nous avons eu recours aux génératrices qui de toutes les lignes que l'on peut tracer sur ces surfaces, se prêtent le mieux à une détermination facile. Ce même emploi de lignes droites dont nous avons appris tout d'abord à déterminer la section par des plans, n'existe plus lorsqu'il faut opérer sur des surfaces de révolution qui généralement sont telles qu'aucune ligne droite ne peut y être tracée ; il faut donc avoir recours à des courbes, mais ces courbes, il convient de les choisir de manière qu'elles soient d'une construction facile, et nous ne trouvons que le cercle qui soit dans ces conditions. Aussi, pour résoudre le problème qui nous occupe, chercherons-nous successivement les intersections des différents parallèles avec le plan donné; et ces parallèles, situés chacun dans des plans horizontaux, nous offrent cet immense avantage d'avoir pour projections horizontales des circonférences identiques à eux-mêmes, et pour projections verticales des lignes droites parallèles à la ligne de terre.

Considérons en particulier le parallèle F qui se projette verticalement en F^v: pour obtenir sa projection horizontale il suffit de prolonger F^v jusqu'à C^v en a^v, et alors le point a étant un point de l'ellipse génératrice que l'on appelle l'ellipse *méridienne*, sa projection horizontale tombe en a^h sur C^h. Le parallèle F passant par le point a, sa projection horizontale F^h passe par a^h et elle n'est autre chose que la circonférence décrite, comme les projections de tous les parallèles, du point Z^h comme centre avec le rayon spécial $Z^h\ a^h$.

Le problème proposé est donc ramené à une série de constructions élémentaires qui permettent d'obtenir les intersections avec le plan P de chacun des parallèles tels que F, représentés en projection par F^h et F^v.

Si ce parallèle rencontre le plan P, F^v projection verticale de F rencontre nécessairement VP *projection* verticale du plan P, et m^v étant ce point de rencontre, il sera la projection du point m en lequel le parallèle perce le plan, et la représentation de ce point sera facilement complétée en mettant m^v en

projection horizontale en m^h sur F^h. On voit sur la figure que cette opération conduit à deux projections horizontales m^h et m'^h qui correspondent toutes deux à m^v.

On déterminera de la même façon autant de points que l'on voudra de la courbe S^h, intersection cherchée, et réunissant ces points par un trait continu on obtiendra cette courbe elle-même en S^h.

Cette courbe cherchée étant dès lors connue par ses deux projections, il n'y aura pour en obtenir la représentation en vraie grandeur, qu'à opérer, par l'une ou l'autre méthode, comme nous l'avons fait dans toutes les épures précédentes, et le dessin lui-même suffira comme guide pour suivre les constructions que cette détermination exige.

209. Il est bon d'observer que la solution que nous venons de présenter avec quelques détails pour qu'elle soit comprise plus facilement, revient en définitive à l'emploi de plans auxiliaires horizontaux qui coupent à la fois le plan donné et la surface donnée suivant certaines lignes dont les points d'intersection fournissent les points de la courbe cherchée. Ainsi, dans la recherche que nous avons faite au moyen du parallèle F, on sait à priori que ce parallèle est la section faite dans l'ellipsoïde par un plan horizontal dont F^v serait la trace verticale, tandis que la corde mm, projetée horizontalement en m^h m'^h et verticalement en un point unique m^v, n'est autre chose que l'intersection du plan donné P par le plan auxiliaire du parallèle F.

Ramener ainsi la détermination de l'intersection de deux surfaces à celle de points de rencontre des intersections faites respectivement dans chacune d'elles par une surface auxiliaire convenablement choisie, tel est le procédé général que nous aurons à mettre en œuvre dans toutes les questions qui vont suivre.

Généralement cette surface auxiliaire est un plan tellement placé par rapport aux deux surfaces données, que ces intersections respectives soient d'une construction facile ; mais nous aurons cependant, dans ces éléments, à employer le cône et la sphère pour le même objet.

210. Dans la planche XLIX, la détermination de la section plane de l'ellipsoïde a été résolue dans toute sa généralité ; c'est

toujours une ellipse génératrice M qui engendre la surface de révolution en tournant autour de son petit axe Z que nous supposons être vertical ; le plan donné P au lieu d'être perpendiculaire au plan vertical, comme dans le cas précédent, est dirigé d'une manière quelconque comme l'indiquent les positions de ses deux traces HP et VP.

En présence de ce problème général, quelles sont les questions qu'il conviendra de se poser, conformément aux prescriptions précédentes, pour arriver le plus facilement possible à une solution ?

Ces questions ne sont pour ainsi dire qu'un formulaire auquel il sera bon d'avoir recours dans tous les problèmes analogues.

Quelle est la surface auxiliaire dont l'intersection avec la surface donnée sera une ligne de construction facile ? La surface est de révolution : un plan perpendiculaire à l'axe la coupera suivant un parallèle que nous savons être une circonférence de cercle d'une facile construction ; en choisissant un pareil plan comme surface auxiliaire, nous nous trouverons donc placé, par rapport à la surface donnée, dans d'excellentes conditions.

En sera-t-il de même pour l'autre surface donnée ? Ici cette surface est un plan dont l'intersection avec le plan auxiliaire choisi dans les conditions précédentes sera toujours d'une facile détermination ; un pareil plan satisfera donc à toutes les conditions désirables de simplicité, et nous arriverons à l'intersection de la surface de révolution par le plan P, en coupant à la fois la surface et le plan, par une série de plans perpendiculaires à l'axe de rotation A.

Toute l'épure est dans ces quelques mots : soit F^v la trace d'un plan horizontal quelconque, ce plan coupera l'ellipsoïde suivant le parallèle, projeté verticalement en F^v et horizontalement en F^h, le rayon de cette circonférence F^h étant donné, comme précédemment, en mettant en projection horizontale le point a^v, en a^h.

L'intersection du plan P et du plan auxiliaire F ne présente non plus aucune difficulté ; les deux traces verticales se coupent en b^v : par suite, l'horizontale B, qui est l'intersection des deux plans, se projette horizontalement en B^h, parallèle à HP ; on en

connaît le point b^h, en mettant b^v en projection horizontale sur la ligne de terre. La construction apprend que B^h et F^h se rencontrent en m^h et m_1^h, qui appartiennent à la fois aux deux surfaces données, et qu'il est dès lors facile de mettre en projection verticale en m^v et m_1^v. On connaît ainsi deux points de la projection horizontale de l'intersection cherchée et deux points de sa projection verticale; on déterminera ces deux courbes par points pour obtenir S^h et S^v.

Quant à la représentation en vraie grandeur de la courbe S, dont nous avons ainsi les deux projections, nous ne pourrions mieux faire que de renvoyer au dessin, et aux explications données pour les questions analogues dont nous nous sommes précédemment occupé.

IV. SECTION PLANE DE L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

211. Le mode de solution que nous avons développé pour obtenir la section faite par un plan dans une surface de révolution est tout à fait indépendant de la nature de la courbe génératrice : qu'elle soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole, la section n'en sera pas moins une courbe du second degré, et nous pourrions borner là notre examen, si l'une de ces surfaces, l'hyperboloïde de révolution à une nappe, ne pouvait aussi être engendré par une simple droite, tournant autour d'un axe qui n'est pas avec elle dans un même plan. Nous chercherons encore la section faite dans l'hyperboloïde par un plan, en partant de ce nouveau mode de génération; mais nous nous bornerons au cas où le plan donné est perpendiculaire au plan vertical de projection.

Étant donnés un axe Z, situé d'une manière quelconque dans l'espace, et une génératrice droite G, assujettie à tourner autour de cet axe, avec lequel elle n'est pas dans un même plan, nous pourrons toujours, à l'aide de changements de plan ou de mouvements de rotation convenables, faire en sorte que l'axe Z soit perpendiculaire à l'un des plans de projection, la droite G étant parallèle à l'autre; toute espèce de doute serait d'ailleurs dissipé, à cet égard, par le seul examen de la solution que nous avons donnée pour le problème de la plus courte distance de

deux droites. Ce ne sera donc rien enlever à la généralité de la question que de représenter, dans notre planche L, l'axe Z par les projections Z^v et Z^h, l'une perpendiculaire à la ligne de terre LT, l'autre réduite à un point Z^h, et de supposer en même temps que la droite G est parallèle au plan vertical, et par conséquent a pour projection horizontale une droite G^h, parallèle à la ligne de terre.

Quel sera, d'après ces données, le moyen le plus convenable pour trouver l'intersection par le plan P de la surface dont nous venons de définir le mode de génération? Aurons-nous recours encore, comme nous l'avons tout à l'heure recommandé, à une série de surfaces auxiliaires, ou ne sera-t-il pas plus simple, puisque nous avons ici des génératrices rectilignes, de chercher successivement les points de rencontre de ces génératrices avec le plan donné? Le doute serait difficilement permis à cet égard, et nous adopterons la dernière méthode, en nous rappelant qu'elle nous a parfaitement suffi pour le cylindre et pour le cône, qui présentent aussi un système complet de génératrices rectilignes.

Pour obtenir une nouvelle position de la génératrice G, qui n'est, en définitive, qu'une droite tournant autour d'un axe placé dans les mêmes conditions que ceux que nous avons si fréquemment employés dans les applications nombreuses que nous avons faites des mouvements de rotation, il nous suffira de considérer la circonférence C^h tangente à la projection G^h, et de reconnaître que la projection horizontale de la génératrice G dans l'une quelconque de ses positions ne cessera pas d'être tangente à cette circonférence C^h, nous pourrons nous donner arbitrairement une projection G'^h, satisfaisant à cette condition, et pour avoir G'^v nous nous servirons, comme à l'ordinaire, de la rotation d'un des points de la droite G, du point, par exemple, en lequel, pour plus de simplicité, elle vient rencontrer le plan horizontal; il est impossible que, dans ce mouvement, cette trace horizontale quitte le parallèle T projeté en T^v sur la ligne de terre, de sorte que le point n de G'^h a pour projection n^v sur cette ligne de terre; d'un autre côté, le point de tangence m^h se projette en m^v sur la projection C^v du parallèle qui passe par le point de contact, et que l'on appelle *cercle de gorge*, parce qu'en effet il est le plus petit de tous les parallèles

de la surface; G'^v est donc connue par m^v et n^v, et, en ce qui concerne cette génératrice individuelle G', la question se réduit à trouver le point de rencontre de cette génératrice avec le plan P, ce qui détermine le point p^h, p^v, qui appartient à la courbe cherchée, que l'on construira par points, à l'aide d'autant de génératrices que l'on voudra, telles que G'.

L'épure de la planche L fournit ainsi l'ellipse S^h, tandis que les plans P et Q de la planche LI coupent l'hyperboloïde dans l'un et l'autre cas, suivant les deux branches d'une hyperbole placée, pour chacun d'eux, dans une situation particulière.

212. Pour justifier le nom d'hyperboloïde, à la surface ainsi engendrée, il suffirait de déterminer par les moyens ordinaires de la géométrie descriptive, la section que l'on obtiendrait en coupant cette surface par un plan vertical passant par l'axe Z; puisque cette surface est une surface de révolution, nous savons déjà que la section sera constamment identique pour toutes les inclinaisons de ce plan vertical, par rapport au plan vertical de projection, et la figure de la planche L donne sans aucune opération nouvelle le profil de la section faite par le plan méridien dont la trace est M^hZ^h; ce plan coupe en particulier la génératrice G' en un point a, dont on connaîtra facilement la projection a^v au moyen de la projection a^h qui se trouve à la rencontre des deux projections horizontales, car M^hZ^h peut être considérée comme la projection horizontale du plan méridien dont elle est la trace.

L'opération ainsi faite pour chacune des génératrices successives conduirait à une suite de points qui, reliés par un trait continu, fournirait la courbe M^v, sur laquelle on pourrait graphiquement vérifier qu'elle jouit de toutes les propriétés de l'hyperbole. La surface engendrée par la droite G en tournant autour de l'axe Z, est donc réellement un hyperboloïde de révolution.

Tout autre plan passant par l'axe couperait la surface de révolution suivant une hyperbole identique.

213. Soit M (fig. 6), l'une de ces sections méridiennes, son plan que l'on appelle un plan méridien et que nous désignerons également par M, divisera la surface en deux parties parfaitement symétriques, en telle sorte que si m est un point de l'hy-

perboloïde, on obtiendra un autre point m' de cette même surface en mesurant sur le parallèle P à partir du méridien M, et en sens contraire de mp, un arc circulaire $m'p = mp$.

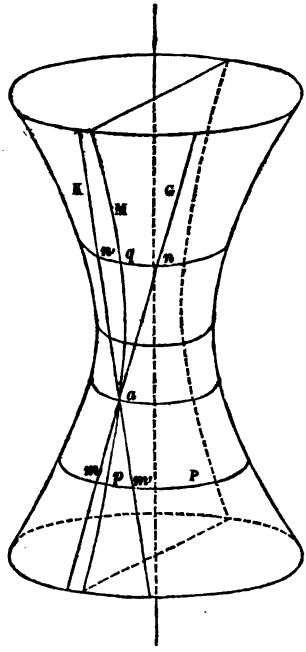


Fig. 6.

Il en serait de même pour tout autre point n de quelque manière qu'il soit placé sur la surface de l'hyperboloïde par rapport au plan méridien M; et de cette raison de symétrie il résulte que si a est un point de la surface pris dans le plan méridien M, et si les trois points a, m, et n de l'hyperboloïde sont en ligne droite, les trois points a, m', n' le seront également; en telle sorte que s'il existe une génératrice rectiligne G pour le point a, il existera nécessairement pour ce même point a une autre génératrice rectiligne K, inversement placée et appartenant comme la première à la même surface de révolution*.

Ces deux génératrices G et K sont symétriquement placées par rapport au plan méridien M, et comme, à chacune des positions de G, correspond une position semblable pour K, on peut dire que la surface sera indifféremment décrite par l'une ou l'autre de ces génératrices que l'on distingue l'une de l'autre en disant qu'elles appartiennent à des systèmes différents.

214. Si le point m que nous avons considéré en général était situé sur le cercle de gorge, la génératrice G du premier système se projetant sur tout plan perpendiculaire à l'axe suivant la tangente à la projection du cercle de gorge, il en sera de

* Ce double système de génératrices n'existe pas dans le cône droit, que l'on peut considérer comme un cas particulier de l'hyperboloïde de révolution, dans lequel les deux génératrices viennent se confondre en une seule, située dans le plan méridien M.

même pour la génératrice K du second système ; l'une et l'autre se projetteront suivant cette seule et même tangente.

Il résulte également de là que pour obtenir les deux génératrices à un point quelconque m, en projection sur un pareil plan, il suffira de mener de la projection du point m deux tangentes à la projection du cercle de gorge.

215. Ces observations mises à profit dans l'épure de la planche L, permettront de diminuer le nombre des opérations; la projection G'^h par exemple, commune aux deux génératrices passant par le point m, fournira les deux points p^h et q^h de la courbe d'intersection S^h.

216. Cette propriété de la double génération rectiligne de l'hyperboloïde de révolution à une nappe sera invoquée dans la solution des différents problèmes que nous aurons à résoudre sur cette surface, notamment lorsque nous nous occuperons du plan tangent à la surface de révolution, et de la tangente à la courbe d'intersection de cette surface par un plan (235).

V. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES SECTIONS PLANES DES SURFACES COURBES.

217. Les considérations précédentes suffisent complétement à la détermination par points des courbes intersections des différentes surfaces que nous avons considérées, par des plans, mais il ne sera pas inutile d'y joindre quelques notions élémentaires sur la nature même des courbes ainsi construites, et d'indiquer brièvement comment on peut utiliser quelques-unes des constructions pour obtenir des points remarquables de chacune de ces courbes.

Il n'est pas une des épures que nous venons de passer en revue qui ne puisse se prêter à des considérations de cette nature, puisées dans le seul tracé graphique.

218. Si nous nous reportons pour un instant à l'épure de la planche XLII, il est facile de voir que le plan comme le cylindre, étant symétrique par rapport au plan méridien parallèle au plan vertical, la courbe d'intersection sera nécessairement sy-

métrique par rapport à ce même plan méridien; c'est ce qui explique pourquoi dans la construction de la courbe S'^h ou de la courbe $S^{h'}$, deux points de chacune de ces courbes correspondent en général à chacun des points tels que m^v; en ce qui concerne la courbe S'^h il n'y a d'exception que pour les points de cette courbe qui se trouvent placés sur la ligne qui représente l'intersection du plan donné P avec le plan méridien : pour ces points la corde telle que m'^h m'^h_1 n'existe plus, et les perpendiculaires à la ligne de terre sont tangentes à la courbe, car on conçoit parfaitement bien que l'on arrive à la tangente par le déplacement d'une sécante qui se meut parallèlement à elle-même, et qu'entre la position dans laquelle elle coupe la courbe en deux points et la position dans laquelle elle ne la rencontre plus, il y a nécessairement une position intermédiaire qui est la position de la tangente.

Si nous considérons les lignes de construction parallèles à la ligne de terre, nous pouvons également les regarder comme les traces de plans verticaux qui coupent en général la surface suivant deux génératrices, et les intersections de ces génératrices avec le plan donné, fournissent en général deux points de la courbe intersection, situés après le rabattement sur une même parallèle à la ligne de terre; à la limite la sécante ainsi placée devient tengente et la courbe S'^h se trouve limitée par deux tangentes parallèles à la ligne de terre.

On comprend déjà comment de semblables remarques peuvent être utiles pour le tracé des intersections.

Dans l'épure XLIII on connaît également par la construction même un certain nombre de tangentes de la courbe S^h; en général sur une ligne telle que G^h, on trouve deux points de la projection horizontale de la courbe que l'on peut construire isolément, et cette ligne G^h peut en conséquence être considérée comme une corde de la courbe S^h; sur chacune des génératrices extrêmes, au contraire, il n'y a qu'un seul de ces points, et les projections horizontales de ces génératrices deviennent des tangentes à la projection horizontale de la courbe.

Si sur la même figure on considère les lignes parallèles à HP on arrive à la même conclusion : les parallèles limites sont tangentes à la courbe et la construction indique comment se trouvent déterminées de position ces parallèles limites.

Les mêmes observations peuvent être faites par rapport aux courbes $S^{h''}$ et S'^{h}.

219. Sans poursuivre en détail ces considérations sur les planches suivantes, nous nous bornerons à indiquer quelques-unes des positions des tangentes ainsi fournies par les positions limites des sécantes.

Dans la planche XLIV chaque parallèle et chaque perpendiculaire à la ligne de terre correspondent en général à deux points de la courbe S^h ; il n'y a d'exception que pour les parallèles et les perpendiculaires limites, qui fournissent ainsi quatre droites tangentes à la courbe cherchée en des points que la construction même permet de déterminer immédiatement. Les mêmes droites jouissent des mêmes propriétés par rapport à la courbe S'^h en vraie grandeur, et en ce qui concerne la courbe $S^{h'}$, il faut considérer les parallèles et les perpendiculaires extrêmes à la nouvelle ligne de terre L',T'.

Dans l'épure de la planche XLV, deux points de chaque projection de la courbe sont respectivement placés sur chaque projection de l'une quelconque des génératrices, parce que chaque projection horizontale de l'une d'elles correspond à deux projections verticales et réciproquement; il n'y a d'exception que pour les projections extrêmes, qui sont respectivement tangentes aux deux projections de l'intersection en des points qu'il est facile de déterminer.

Ici la tangente n'est plus la limite des sécantes parallèles, mais la limite des sécantes assujetties à passer par un même point; on conçoit en effet que si par un point quelconque a pris dans le plan d'une courbe plane quelconque S, on fait passer une sécante quelconque, et si l'on promène ensuite cette droite dans le même plan en la faisant tourner autour du point a, il y aura, entre la dernière position dans laquelle elle sera encore sécante et la position dans laquelle elle ne rencontrera plus la courbe, une position intermédiaire pour laquelle elle se confondra avec l'élément de cette courbe S.

On arrivera donc toujours à une position de tangence, soit que l'on considère la limite des sécantes passant par un point donné pris sur une courbe ou à l'extérieur de cette courbe, soit que l'on recherche la limite des sécantes parallèles à une droite donnée.

Dans ce dernier système on aura encore à considérer dans la planche XLV les tangentes à la courbe S^h, perpendiculaires à la ligne de terre L'T', et les tangentes à la courbe $S^{h''}$, perpendiculaires à la ligne de terre L''T''.

220. Le même ordre d'idées nous fournira des considérations analogues relativement à l'épure XLVIII qui se rapporte à la section plane de la surface de révolution.

Les différents points de S^h (épure XLVIII) se trouvent placés deux à deux sur les différentes parallèles à la ligne de terre LT : les parallèles extrêmes sont tangentes à la courbe.

Pour chacun des *parallèles* F de la surface, considéré en projection horizontale, nous obtenons en général quatre points de la courbe, situés deux à deux sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, comme m^h et m_1^h; si cette sécante devient tangente à la projection horizontale du parallèle correspondant, on obtient aussi une tangente à la projection horizontale de l'intersection; c'est ce qui arrive pour les points b^h et c^h qui correspondent aux points b^v et c^v de rencontre de la trace verticale VP du plan sécant, avec la projection verticale C^v du méridien C, ainsi qu'on pouvait du reste le prévoir, la courbe comme celle de la planche XLII devant être symétrique par rapport au plan méridien parallèle au plan vertical de projection.

Cette observation serait également vraie pour toute autre surface de révolution donnée par son méridien; mais quand il s'agit de l'hyperboloïde de révolution donné par sa génératrice droite, il faut nécessairement avoir recours à d'autres considérations si l'on veut, sans construire la section méridienne, obtenir les points en lesquels la tangente est perpendiculaire à la ligne de terre.

221. Soit b^h (planche L) un de ces points, le point b dont il est la projection, appartenant à la fois au plan P et au plan méridien M, pourra être considéré comme situé sur une droite A qui aurait pour projection horizontale M^h et pour projection verticale VP, c'est-à-dire sur la droite intersection du plan P et du plan M; si cette droite A, qui rencontre l'axe en un point o, connu par ses traces o^h et o^v, vient à tourner autour de cet axe, le point b décrira dans l'espace un des parallèles de l'hyperbo-

loïde, pendant que la trace t de cette droite A décrira dans le plan horizontal de projection la circonférence D qu'il nous est facile de tracer sur l'épure, et le point b dans ce mouvement viendra successivement rencontrer toutes les génératrices de l'hyperboloïde : quand il sera venu se placer sur la génératrice G qui nous a servi à la représentation de cette surface, la droite A', nouvelle position de la droite A, aura donc le point b' commun avec la génératrice G, ces deux droites seront dans un même plan dont on connaîtra la trace horizontale HQ en joignant la trace g de l'une de ces droites à la trace k de sa parallèle B' menée par le point o par lequel passe constamment la droite A. Les traces horizontales de toutes les droites contenues dans ce plan sont nécessairement sur cette trace HQ et par conséquent aussi celle de la droite A', qui devant aussi se trouver sur D n'est autre que le point d de rencontre de ces deux lignes; dès lors la projection b'^h de la nouvelle position du point inconnu b est donnée par l'intersection de A'^h et de G^h, et il suffit de ramener b'^h en b^h sur M^h pour obtenir le *sommet* cherché. Un autre sommet est obtenu de la même manière en ramenant c'^h en c^h.

Les mêmes constructions appliquées au plan Q de l'épure LI fourniraient les sommets b^h et c^h des deux branches de l'intersection : en cherchant à les effectuer pour le plan P de la même épure, on reconnaîtrait que la trace du plan qui remplacerait le plan Q de l'épure L ne rencontrant pas la circonférence D, il y a lieu d'en conclure que la section faite dans l'hyperboloïde par le plan P n'a aucun point pour lequel la tangente soit perpendiculaire à la ligne de terre. Nous aurons à nous rendre compte de ces différentes circonstances.

222. Encore bien que l'on puisse, par des considérations uniquement puisées dans la géométrie descriptive, démontrer les propriétés principales des sections coniques, il nous serait impossible dans ces éléments de nous livrer à tous les développements que ces démonstrations exigeraient, et nous devrons nous borner à quelques observations générales sur ces courbes planes qui ne sauraient jamais être, pour les surfaces que nous avons jusqu'ici considérées, que des ellipses, des paraboles ou des hyperboles. Aucune surface du second degré ne peut avoir de commun avec un plan, de quelque manière que l'un et l'autre

de ces éléments géométriques soient placés dans l'espace, que des courbes du second degré.

En nous bornant à considérer le cylindre droit à base circulaire, il est évident qu'il ne pourra être coupé par un plan quelconque que suivant une courbe fermée, qui sera nécessairement une ellipse plus ou moins allongée; car dans l'épure de la planche XLII, par exemple, si nous comparons la circonférence C à la courbe S'^h, nous voyons que les ordonnées perpendiculaires à la ligne $a^h b^h$ pour la courbe S'^h sont respectivement égales aux ordonnées correspondantes de la circonférence, et que les abscisses parallèles à la ligne de terre sont au contraire toutes augmentées dans le rapport de S^v à C^v, propriété caractéristique qui suffit à définir la nature géométrique de la section en vraie grandeur.

Dans le cas où la circonférence C serait remplacée par une ellipse, la courbe d'intersection jouirait de cette même propriété par rapport à la trace elliptique du cylindre, ce qui permettrait de tirer la même conclusion que précédemment par rapport à la nature de l'intersection.

Si l'on suppose maintenant que la trace du cylindre droit soit une hyperbole ou une parabole, on démontrera de la même façon que la courbe d'intersection est une hyperbole ou une parabole qui, rapportées à un système de coordonnées semblablement placées, auraient encore des ordonnées respectivement égales à celles de la trace et des abscisses augmentées dans un rapport constant.

Un cylindre droit ayant pour base une des courbes du second degré ne peut donc être coupé par un plan que suivant une courbe de même nature, et la même conclusion peut être tirée d'une trace oblique par rapport à la section droite, les coordonnées de l'un des systèmes conservant dans les deux courbes les mêmes grandeurs respectives, celles de l'autre système étant seulement diminuées dans un rapport constant.

Il n'y a d'exception à cette conclusion générale que pour les plans parallèles aux génératrices, qui coupent, ainsi que nous l'avons vu, les surfaces cylindriques, suivant le système de deux lignes droites parallèles, et l'on sait encore que deux lignes semblables peuvent être considérées comme une ellipse dont le grand axe devient infini.

223. Cette simplicité n'existe plus pour les sections coniques, même pour celles qu'un plan peut faire dans le cône de révolution.

Tous les *parallèles* sont des cercles, et peuvent être considérés comme des sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe.

Tous les plans qui passent par le sommet du cône, ou ne coupent la surface qu'en ce point, qu'on peut considérer comme une ellipse dont les deux axes sont devenus infiniment petits, ou ils déterminent pour section un système de deux génératrices plus ou moins inclinées l'une par rapport à l'autre; et l'on sait qu'un système semblable peut être considéré comme une hyperbole dont l'axe est devenu nul.

Dans toute autre position du plan sécant, l'inspection seule de l'épure suffira pour nous fournir de la nature de la courbe la connaissance la plus exacte. Il est évident qu'elle formera une courbe fermée lorsque la trace VP du plan occupera par rapport aux génératrices extrêmes la même position que dans notre planche XLIV : l'inspection seule de la figure suffit pour montrer que dans tout cas analogue dans lequel le plan coupera les deux génératrices extrêmes sur la même nappe du cône, la courbe se trouvera limitée en projection verticale entre les points a^v et b^v, et qu'en projection horizontale on obtiendra une courbe fermée comme la courbe S.

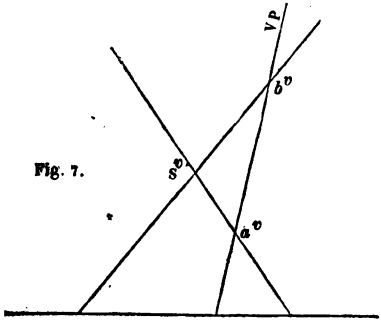


Fig. 7.

Quand, au contraire, la trace du plan occupera la position indiquée dans notre figure 7, en rencontrant chacune des deux génératrices extrêmes sur une nappe différente, il est évident qu'aucun point de la courbe n'existera entre a^v et b^v, et qu'on en trouvera au contraire indéfiniment en s'écartant de ces deux points : la courbe aura donc deux branches infinies qui rappellent la forme de l'hyperbole, et sera une hyperbole en effet si le cône a pour base une des trois courbes du second degré.

Enfin, lorsque la trace VP est parallèle à la projection P^v de l'une des génératrices extrêmes, ainsi que le représente notre figure 8, le point b^v n'existe plus, et la courbe n'a aucun point au-delà de a^v; mais comme la trace du plan ne sort pas, au-dessous de ce point, de la projection du cône, on trouvera, dans la direction contraire, des points de cette courbe, aussi loin que l'on voudra continuer les constructions : l'intersection est alors composée d'une branche infinie qui rappelle la parabole et qui en effet sera une parabole toutes les fois que la trace horizontale du cône sera une courbe du second degré.

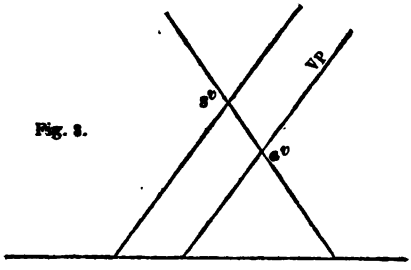


Fig. 8.

L'hypothèse que nous avons faite d'un plan sécant perpendiculaire au plan vertical, comme celui de l'épure XLIV, n'ôte rien d'ailleurs à la généralité de ces observations, parce que, quelle que soit la position de ce plan sécant par rapport à un cône donné, on pourra toujours, soit par des changements de plan, soit par des mouvements de rotation, ramener les données de la question dans cette situation particulière.

224. Quant à la section faite dans l'hyperboloïde de révolution à une nappe, on démontre géométriquement qu'elle est semblable à la section qui serait faite dans le cône *asymptote* de cette surface, en donnant cette dénomination au cône de révolution dont on obtiendrait une génératrice, en menant par le centre du cercle de gorge, qui est en même temps le centre de toutes les sections hyperboliques méridiennes, une asymptote à l'une de ces sections.

225. Il nous reste à donner quelques explications sur les règles à suivre dans la ponctuation des courbes d'intersection que nous avons appris à déterminer : ces explications nous seront d'un grand secours lorsque nous aurons à nous occuper des intersections des surfaces courbes entre elles.

En général, on suppose que la surface que l'on considère

existe matériellement dans l'angle dièdre formé par les plans de projection, de manière à cacher tout ce qui se trouve placé derrière cette surface; le cylindre de la planche XLII est un premier exemple de cette convention : la courbe S ne peut être vue que dans sa partie antérieure, et c'est pour cette raison que la partie postérieure de cette courbe a été ponctuée; si on veut savoir si telle génératrice du cylindre est vue ou cachée, il suffira de reconnaître si elle a pour trace un point placé sur la partie antérieure ou sur la partie postérieure de cette courbe. Quant à la courbe S'^h, on n'en a ponctué la partie postérieure que pour faire ressortir nettement les rapports de position qui existent entre elle et la courbe S.

On ne peut d'ailleurs s'assujettir à cette règle que pour la représentation des données et des résultats du problème sur les plans primitifs de projection, car telle partie qui devrait être ponctuée sur le plan H, considéré comme étant le simultané du plan V, devrait au contraire être une ligne pleine, lorsqu'elle serait considérée comme la représentation d'un élément géométrique qui aurait pour second plan de projection un autre plan V', différent de V.

On verra dans la planche XLIII qu'une partie seulement de la courbe C est tracée en ligne pleine, le surplus étant caché par le cylindre même, pour l'œil qui, placé au-dessus du plan horizontal, regarderait ce cylindre; la partie visible de la courbe S^h se trouve limitée en projection horizontale par les mêmes génératrices que la partie visible de la base C, mais il n'en est plus ainsi à l'égard de la projection verticale de cette même courbe S; pour apprécier comment le trait doit être formé, il faut se placer par la pensée en avant du plan vertical et du cylindre, et reconnaître ce que, dans cette position, on pourrait voir de la courbe; et il est évident que la portion visible d'un pareil point de vue, sera limitée par les deux génératrices limites G et G', que l'on obtient en projection verticale par les tangentes à la base, menées perpendiculairement à la ligne de terre.

Ces mêmes considérations ont été mises à profit pour le tracé des épures suivantes, particulièrement pour la planche XLV, sur laquelle on pourra remarquer combien ce mode de ponctuation ajoute à la clarté du dessin; il en est de même pour la planche XLIX, qui représente la section plane de l'ellip-

soïde, mais souvent aussi on s'écarte de cette règle générale en supprimant par la pensée certaines parties de la surface qui arrête la vue; c'est ainsi que dans les deux planches suivantes on a effectué les tracés comme si toute la partie de chacun des hyperboloïdes, placée au-dessus du cercle de gorge, avait été complétement supprimée; sans cette hypothèse, il aurait fallu ponctuer entièrement toutes les courbes, qui seraient évidemment cachées en entier par la partie supérieure indéfinie de chacun des hyperboloïdes.

CHAPITRE IV.

PLANS TANGENTS ET LIGNES TANGENTES.

226. Jusqu'ici nous n'avons considéré les plans dans leurs rapports avec les surfaces cylindriques, coniques et de révolution, qu'autant qu'ils coupaient ces surfaces suivant certaines courbes que nous avons appris à déterminer.

Il existe cependant une position très-intéressante des plans par rapport à ces surfaces, sur laquelle il nous faut porter notre attention. Imaginons que par un point quelconque d'une surface donnée, on vienne à tracer sur cette surface un certain nombre de courbes, et que l'on construise à chacune de ces courbes sa tangente en ce point : toutes ces tangentes sont situées dans un même plan, que l'on appelle le plan tangent, qu'il importe de savoir construire et qui nous sera tout à fait indispensable dans certaines circonstances, pour pouvoir mener des tangentes aux courbes d'intersection.

Nous nous occuperons donc de la détermination du plan tangent pour chacun des genres de surfaces que nous avons étudiées jusqu'ici, mais nous ferons d'abord voir qu'il existe un pareil plan pour tout point de chacune de ces surfaces.

227. Nous distinguerons successivement deux circonstances particulières dans la position des différentes droites par rapport aux courbes auxquelles elles sont respectivement tangentes.

1° Si, à partir du point de tangence, chacune des courbes est telle qu'elle se trouve placée en avant et en arrière de ce point, du même côté de la droite, la surface est dite *convexe;* soient C une courbe plane tracée sur cette surface et T sa tangente au point m (fig. 9); supposons que par la tangente T on fasse passer un plan qui coupera chacune des autres courbes passant par le point m en différents points n, p, q ; les différentes cordes mn, mp, mq, seront contenues dans ce plan ; mais si maintenant on fait tourner le plan sécant autour de la tangente T comme

charnière, en même temps que le point n d'intersection avec la courbe N sera rapproché du point m, il en sera de même de p et de q; et à la limite, lorsque n sera devenu sur la courbe N le point successif de m, p sera sur P le point successif de m, et q le point successif sur Q; les cordes mn, mp, mq, seront donc devenues des tangentes et elles seront encore toutes dans un même plan; donc enfin toutes les tangentes aux courbes M, P, Q, R, tracées arbitrairement sur la surface convexe S, sont situées dans un même plan.

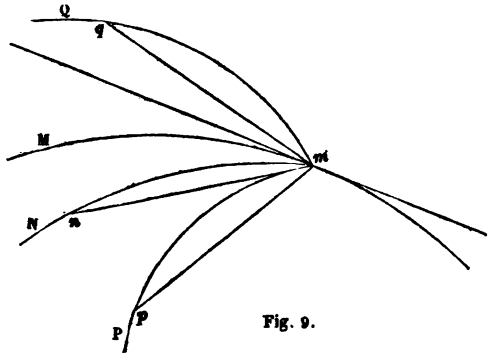


Fig. 9.

2° La démonstration précédente est applicable pourvu que la courbe M soit tout entière placée d'un même côté de la tangente T, et pour pouvoir l'appliquer au cas d'une surface non convexe, il suffit d'admettre que pour tout point m d'une pareille surface, il y aura au moins une courbe qui jouira de cette propriété, ce qui paraîtra évident de soi-même si l'on se représente avec netteté dans l'espace la forme d'une surface qui s'infléchit.

Nous regarderons donc comme démontré que pour tout point d'une surface donnée, il y a un plan tangent qui pourra toujours se construire à l'aide de deux tangentes, menées respectivement à deux courbes tracées sur la surface et passant par ce point, et nous établirons dès à présent un autre principe que nous aurons souvent à invoquer dans la construction des plans tangents.

228. Les projections d'une tangente à une courbe sont tangentes aux projections de cette courbe. Cette proposition est une conséquence presque immédiate de la définition que nous avons donnée de la tangente; soit en effet en m le point de tangence, désignons la courbe par C et la tangente par T : m^h, C^h, T^h, seront les projections du point, de la courbe et de la

tangente sur le même plan H; dire que T est la tangente en M, c'est dire que T est la ligne droite qui passe par les deux points successifs m et m' de la courbe C; m' aura pour projection m'^h, et T^h sera la droite qui joint m^h à m'^h; si sur la courbe C^h, m'^h est le point successif de m^h, T^h sera la tangente à C^h et il ne saurait en être autrement, car s'il existait entre ces deux points un point n^h, il faudrait, en remontant du système en projection au système dans l'espace, qu'un certain point n pût se placer sur la courbe C entre le point m et le point m', auquel cas ce point m' ne serait pas, comme nous l'avons supposé, le point successif de m.

Ce théorème ne souffre d'exception que pour le cas où la tangente T serait perpendiculaire au plan de projection, parce qu'alors le point m et le point m' se superposent en projection, et que par conséquent on ne connaît plus le successif de m^h; lorsque cette circonstance se présente, on dit qu'il y a dans la projection C^h un point de rebroussement en m^h.

229. Ces seuls principes vont nous servir à résoudre les différents problèmes relatifs aux plans tangents.

Lorsqu'on pourra, par le point m d'une surface, conduire sur cette surface une ligne droite, cette droite devra être considérée comme sa propre tangente, et elle servira plus commodément que toute autre ligne de la surface pour déterminer le plan tangent; c'est ainsi que pour le cylindre, le cône et l'hyperboloïde de révolution, on construira le plan tangent à l'aide d'une génératrice rectiligne et de la tangente à une courbe de l'une ou l'autre de ces surfaces, en choisissant pour cette courbe arbitraire celle qui permettra dans les constructions la plus grande simplicité.

Mais, malgré cette similitude dans les moyens de construction, il existe une grande différence entre les propriétés du plan tangent aux surfaces développables, telles que le cylindre et le cône, et celles du plan tangent à l'hyperboloïde de révolution.

Le cylindre pouvant être considéré comme un prisme dont les faces sont infiniment étroites, on voit facilement que si l'on considère sur une même génératrice deux points m et n, si l'on cherche à déterminer les plans tangents en ces deux points, le plan tangent en m devra contenir la génératrice commune G et

l'élément linéaire d'une ligne quelconque tracée par le point m sur la facette; une condition analogue détermine le plan tangent au point n, et, pour l'un comme pour l'autre point, on en peut conclure que chacun des deux plans tangents se confond avec le plan de la facette, ce qui, lorsque l'on reviendra du prisme au cylindre limite, s'exprimera en disant que le plan tangent est tangent au cylindre sur toute la longueur d'une même génératrice. Le cône jouit de la même propriété, mais il n'en est plus de même pour l'hyperboloïde qui, pour chaque point d'une génératrice, aura un plan tangent différent, déterminé par les deux génératrices rectilignes de ce point, qui ne sont pas dans un même plan avec le système des deux génératrices rectilignes d'un autre point de la même génératrice.

I. PLAN TANGENT AU CYLINDRE.

230. Maintenant que nous nous sommes assurés de l'existence du plan tangent en tout point d'une surface cylindrique, nous n'éprouverons aucune difficulté à construire ce plan tangent.

Proposons-nous d'abord de le construire pour un point quelconque m placé sur la surface du cylindre de la planche LII, dont C est la directrice, et dont toutes les génératrices sont parallèles à l'une d'elles G.

Le plan tangent au cylindre au point m, contient la tangente en ce même point à toute courbe tracée sur le cylindre, et par conséquent il doit contenir la génératrice J, qui peut être considérée comme l'une de ces courbes et qui est elle-même sa propre tangente.

D'un autre côté, nous venons de reconnaître que, pour le cylindre, le plan tangent en un point d'une génératrice était tangent au cylindre dans toute la longueur de cette génératrice : il sera donc tangent au cylindre au point a, trace de la génératrice J, et devra contenir en ce point la tangente à la trace C du cylindre; car cette trace, comme toute autre courbe tracée sur la surface, a pour tangente une droite contenue dans le plan tangent.

Ce plan tangent doit donc satisfaire aux conditions suivantes : contenir la génératrice J, dont les projections J^h et J^v sont

communes et la tangente θ à la courbe C; cette tangente est dans le plan de cette courbe, c'est-à-dire dans le plan horizontal, et elle peut être construite géométriquement; on connaît donc deux droites qui doivent être contenues dans le plan tangent, qui se trouve dès lors parfaitement déterminé et facile à construire.

La droite θ étant dans le plan horizontal, sera elle-même la trace horizontale HT du plan tangent V; et en cherchant la trace verticale de la génératrice J, on aurait en cette trace un nouveau point de la trace verticale VT.

Le cadre de notre figure étant trop restreint pour que cette recherche de la trace de la génératrice J nous soit permise, nous y avons suppléé par la considération d'une horizontale du plan tangent, passant par le point *m*; cette horizontale B a pour trace verticale b^v, qui nous a servi à déterminer VT.

Inutile de dire que, pour que cette construction soit praticable, il faut que le point *m* soit sur le cylindre, ce qui exige que m^v et m^h soient respectivement situés sur les deux projections d'une même génératrice.

231. La difficulté ne sera pas plus grande cependant pour mener par le point *m*, planche LIII, un plan tangent au cylindre (C. G).

Ce plan, en effet, devant contenir la génératrice au point de tangence quel qu'il soit, doit contenir aussi la parallèle D menée par le point *m* à cette génératrice, dont la direction est connue; les traces du plan tangent passeront donc respectivement par les traces *d* et d^v de cette parallèle; d'ailleurs, nous avons vu (**230**) que la trace horizontale du plan tangent devait être une tangente à C; il suffit donc de mener à cette courbe la tangente HT par le point *d*, pour obtenir immédiatement cette trace horizontale, la trace verticale VT devant rencontrer au même point qu'elle la ligne de terre et devant passer par d^v. Dans la figure on a dû suppléer à ce point de rencontre des deux traces par la considération d'une parallèle E aux génératrices.

D'un point extérieur *d* à une courbe du second degré, on peut en général mener deux tangentes à cette courbe, ce qui nous permet d'obtenir un deuxième plan tangent S, passant

également par le point *m*. Le problème admet deux solutions quand le point *m* est extérieur au cylindre, une seule quand le point *m* est sur le cylindre; il n'y a plus de plan tangent lorsqu'il est placé dans son intérieur, parce qu'alors la trace *d* de la parallèle D, menée par le point *m* à la direction commune des génératrices, tombe dans l'intérieur de la courbe C, trace du cylindre, à laquelle il serait par conséquent impossible de mener une tangente par ce point *d*.

Les mêmes considérations conduiraient à mener au cylindre (C. G) des plans tangents satisfaisant à toute autre condition : nous nous bornerons à citer les deux plans T et R, que l'on obtiendrait en se proposant de construire des plans tangents parallèles à une droite donnée A.

Par un point quelconque *n* d'une des génératrices J du cylindre, menons une droite B parallèle à A : le plan qui contiendra B et J sera parallèle au plan cherché, qui lui-même doit être parallèle à A et contenir une génératrice de contact.

a et *b* étant les traces horizontales de ces deux droites, la ligne MN qui les joint sera parallèle à la trace horizontale du plan cherché, et cette trace se trouvera dès lors déterminée par cette double condition d'être parallèle à cette droite et d'être tangente à C ; HR et HT seront donc les deux traces horizontales de deux plans qui pourront satisfaire à la condition énoncée, et dont les traces verticales VR et VT s'obtiendront en exprimant graphiquement que ces plans doivent contenir une génératrice du cylindre donné.

232. La seule incertitude qui puisse s'attacher dans les constructions précédentes, tient uniquement à la difficulté plus ou moins grande de mener exactement une tangente à la courbe C. Quand cette courbe, comme celles du second degré par exemple, jouit de propriétés telles que l'on puisse tracer cette tangente par des procédés géométriques certains, cette cause d'inexactitude n'existe pas, et elle n'est vraiment à craindre, pour toute autre courbe, que pour le cas du plan tangent mené par un point donné sur la surface cylindrique; dans ce cas, en effet, on ne peut être certain de déterminer à la règle, et sans recourir aux propriétés géométriques de la courbe, une tangente dont la direction soit peu différente de la direction

réelle, tandis que la règle et l'équerre suffisent complétement pour mener une pareille tangente par un point extérieur ou parallèlement à une droite donnée; l'incertitude n'existe, dans ces deux circonstances, que sur la position exacte du point de contact, et il suffit, pour qu'elle n'ait aucune influence sur le résultat, de ne pas se servir de ce point pour les constructions ultérieures. Nous avons apporté ce scrupule dans les tracés de la planche LIII.

II. PLAN TANGENT AU CÔNE.

233. Avec cette seule différence que les génératrices du cône, au lieu d'être parallèles entre elles comme celles du cylindre, viennent toutes concourir en un même point qui est le sommet du cône, nous pourrions reproduire ici toutes les considérations que nous avons présentées au sujet des planches LII et LIII; ce rapprochement nous permettra de parcourir rapidement les épures LIV et LV qui traitent des mêmes questions à l'égard de la surface conique.

Le plan tangent au point *m*, qu'il s'agit de construire dans la planche LIV, doit contenir la génératrice G qui passe par le point *m*, et la tangente θ à la courbe C au point *a*, qui est la trace horizontale de cette génératrice; la trace horizontale HT du plan tangent en *m* n'est autre chose que cette tangente θ, et sa trace verticale VT doit passer par la trace b^v de cette même génératrice G.

La planche LV, comme la planche LIII, est consacrée au plan tangent mené par un point donné *m*, et au plan tangent mené parallèlement à une droite donnée B.

Pour la première question, il suffit de remarquer que tous les plans tangents au cône devant passer par le sommet *s* du cône, le plan cherché doit contenir la droite *ms* qui joint ce sommet au point *m*, et que, par conséquent, les traces du plan cherché doivent passer par les traces de cette droite; la trace horizontale du plan s'obtient en menant par la trace horizontale de la droite une tangente à la courbe C, et la trace verticale se trouve déterminée par cela seul qu'elle passe par la trace verticale de la droite.

Toutes les fois que le point *m* est extérieur au cône, la trace

de la droite se trouve en dehors de la trace ou base du cône, et il y a autant de solutions que l'on peut ainsi mener de tangentes : c'est pour cela que l'on a été conduit à la fois aux deux plans P et Q.

Enfin pour mener à la surface conique un plan tangent parallèle à la droite B, il faut remarquer que ce plan, qui passe par le point *s*, sommet du cône, contiendra nécessairement la parallèle A menée par ce sommet à la droite B : les traces du plan devront respectivement passer par les traces de la droite A ; *a* est la trace horizontale de cette droite et la trace du plan doit être tangente à la courbe C : nous retombons donc encore sur les deux plans P et Q du problème précédent, qui se trouvent chacun représentés sur le dessin par leurs traces HP et VP, HQ et VQ.

III. PLAN TANGENT A LA SURFACE DE RÉVOLUTION.

234. Mais s'il s'agit d'une surface de révolution, les mêmes considérations ne sont plus suffisantes, et nous examinerons avec quelques détails la question du plan tangent, mené à une surface de révolution par un point pris sur cette surface.

Ce point est en *m* dans la figure de la planche LVI, qui représente un ellipsoïde, engendré par une ellipse M, tournant autour de son grand axe Z.

Nous supposerons d'abord que l'on s'est assuré que le point *m* est bien situé sur la surface de révolution, c'est-à-dire que, si l'on prolonge la projection verticale P^v du parallèle P qui passe par le point *m*, jusqu'en n^v, à la rencontre du méridien M^v, le point n^v, mis en projection horizontale sur P^h, se trouvera en même temps sur M^h, c'est-à-dire à la rencontre de ces deux projections horizontales.

Soit K^v la tangente au point n^v du méridien M^v, K^v pourra être considérée comme la projection verticale d'une droite K, qui aurait pour projection horizontale K^h, et qui serait par conséquent contenue, comme la courbe M, dans le plan méridien de la surface que l'on considère. Imaginons, pour un instant, que cette droite K tourne autour de l'axe Z en même temps que la courbe méridienne M ; pendant que cette courbe décrira l'ellipsoïde de révolution, auquel nous voulons me-

ner un plan tangent, la droite K décrira un cône droit de révolution, dont l'axe Z de la surface sera aussi l'axe, et dont les génératrices seront respectivement tangentes, en tous les points du parallèle P, aux courbes méridiennes correspondantes; le cône et l'ellipsoïde auront, sur tout le pourtour de P, un élément annulaire commun, et, par conséquent, le plan tangent à l'ellipsoïde, en un certain point *m* de cet élément annulaire, se confondra avec le plan tangent au cône en ce même point; le problème du plan tangent à l'ellipsoïde se trouve donc ramené à celui du plan tangent au cône dont une génératrice est K, et dont par conséquent la trace sur le plan horizontal est la circonférence C; la génératrice de ce cône qui passe par le point *m* aura pour projections G^v et G^h, sa trace sera en *a* et la trace du plan tangent en HT; on en conclura VT, par cette considération que le plan tangent passe par le point *m* ou par tout autre point de la génératrice G.

255. Telle est la méthode générale à l'aide de laquelle il convient de déterminer le plan tangent en un point d'une surface de révolution; mais on peut quelquefois, lorsqu'il s'agit d'une surface particulière, parvenir à utiliser quelques-unes des propriétés géométriques de cette surface pour simplifier cette solution. C'est ce qu'il est convenable de faire par exemple pour le plan tangent à l'hyperboloïde de révolution, considéré comme engendré par une droite tournant autour d'un axe qui n'est pas avec elle dans un même plan.

Nous savons que le plan tangent au point *m*, par exemple, de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, représenté dans notre planche LVII, contient toutes les tangentes à toutes les courbes quelles qu'elles soient qui, passant par ce point *m*, pourraient être tracées sur la surface de l'hyperboloïde; mais pour le point *m*, comme pour tout autre point de cette surface, nous savons qu'il existe deux génératrices rectilignes qui peuvent être regardées comme étant à elles-mêmes leurs propres tangentes; deux droites sont d'ailleurs suffisantes pour déterminer un plan, et le plan tangent au point *m* sera par conséquent le plan de ces deux génératrices, dont nous allons chercher les projections.

A^h, A^v sont les projections de la génératrice A parallèle au plan vertical, le cercle de gorge est projeté en vraie grandeur

sur C^h circonférence tangente à cette génératrice ; les projections de toutes les génératrices des deux systèmes sont, d'après ce que nous avons vu, toutes tangentes à ce cercle de gorge ; donc celles qui passent par le point m sont projetées horizontalement en G^h et K^h, tangentes menées par le point m à cette circonférence ; les points de tangence sont p^h et q^h que nous projetons verticalement sur C^v en p^v et q^v ; $m^v p^v$, $m^v q^v$, sont donc les projections verticales de ces génératrices qui étant maintenant connues par leurs deux projections, permettent de construire le plan T, qui les renferme et qui est le plan tangent cherché.

IV. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PLANS TANGENTS ET SUR LES LIGNES TANGENTES.

236. Le plan tangent que nous venons d'apprendre à construire nous fournit un moyen général de détermination pour la tangente en un point quelconque de l'une des sections planes que nous avons construites par points ; de ce que le plan tangent en effet contient toutes les tangentes au point de contact, il résulte qu'il contient en particulier celle de la courbe que l'on considère ; mais d'un autre côté, la tangente à une courbe plane ne peut sortir du plan de cette courbe, puisqu'elle n'est autre chose que le prolongement de l'un de ses éléments, nécessairement contenu dans ce plan ; la tangente est donc à la fois dans le plan sécant et dans le plan tangent ; elle est l'intersection de ces deux plans, et le problème de la tangente est ainsi ramené à celui de l'intersection de deux plans, que nous avons examiné avec tout le soin nécessaire.

237. S'agit-il par exemple de construire une tangente au point m à la courbe S d'intersection du cylindre de notre planche XLIII, par le plan P ; nous pourrons construire le plan tangent en m, qui est tangent au cylindre dans toute la longueur de la génératrice droite qui passe par ce point ; nous savons déterminer la trace de ce plan, qui n'est autre chose que la tangente à la trace du cylindre à l'extrémité de cette même génératrice ; l'intersection de ce plan tangent T avec le plan P nous donnera la tangente cherchée ; mais cette intersection, nous

pouvons l'obtenir sans aucune construction nouvelle, car nous en connaissons immédiatement deux points, le point p, qui est le point de rencontre des deux traces, et le point m, qui est le point sur lequel nous opérons; joignant donc p à m^h, nous obtenons la projection horizontale de la tangente cherchée, ce qui confirme les conséquences que nous avions tirées des propriétés du point p de la planche XLI, d'après la considération des limites.

Il serait inutile de reproduire les mêmes raisonnements à l'égard de la section conique, et nous nous bornerons à observer que pour avoir la projection verticale de la tangente dans toutes les questions analogues, il suffirait de mettre le point p en projection verticale sur la ligne de terre en p^v, et de joindre p^v à m^v.

Cette méthode est générale, et nous en ferons encore une application aux surfaces de révolution pour lesquelles nous n'avons pas encore appris à construire la tangente, bien que les constructions relatives à cette question soient effectuées sur les épures que nous avons déjà passées en revue; nous ne pouvons même ici construire la tangente que par la considération du plan tangent.

Reproduisons sur la planche XLVIII les constructions de notre planche LVI: k^v est la projection verticale de l'une des génératrices du cône auxiliaire qui passe par le point m, la trace horizontale de ce cône est la circonférence D^h; la génératrice du point m a pour projection horizontale G^h, pour trace n^h sur D^h, et par conséquent la trace du plan tangent au cône en m, qui est aussi tangent à la surface de révolution, n'est autre chose que la tangente HT en n^h à D^h; HP et HT se rencontrent en p, qui est un point de la tangente cherchée dont la projection horizontale se trouve dès lors construite en 6^h.

Lorsque la surface dont on cherche à déterminer la section par un plan est un hyperboloïde de révolution à une nappe, le plan tangent à la surface s'obtient immédiatement par la recherche des deux génératrices droites de la surface en ce point, mais la construction relative à la tangente reste la même, en ce que cette droite s'obtient toujours par l'intersection commune du plan tangent et du plan sécant; ces opérations ont été effectuées sur l'épure de la planche L. Pour avoir les deux génératrices du point p, il suffit de mener par p^h deux tangentes à

la projection horizontale G^h du cercle de gorge ; ces deux génératrices ont leurs traces sur la trace T^h de l'hyperboloïde en a et b; la trace du plan tangent est donc HT, qui coupe HP en c, et la projection θ^h de la tangente s'obtient immédiatement en joignant les points c et p^h. La première partie de cette construction est empruntée à celle des planches LVI et LVII.

238. En ce qui concerne la détermination de la tangente, l'utilité du plan tangent ne se borne pas aux courbes planes; ce plan nous servira de la même façon pour les courbes intersections, quelles qu'elles soient, des surfaces courbes entre elles; soit en effet m un point de cette intersection de deux surfaces S et S', en construisant les plans T et T', respectivement tangents à ces deux surfaces au même point m, l'intersection θ de ces deux plans sera la tangente à l'intersection commune; en effet, le plan tangent T contient l'élément linéaire de la courbe en m, puisqu'il contient les tangentes à toutes les courbes qui, passant par le point m, sont tracées sur la surface S; il en est de même pour le plan T', par rapport à la surface S'; cet élément linéaire étant dès lors contenu dans les deux plans, est aussi sur leur intersection, qui étant le prolongement de cet élément linéaire, n'est par définition que la tangente.

C'est ainsi que seront obtenues dans le chapitre suivant les tangentes à toutes les courbes intersections que nous aurons à construire ; les épures elles-mêmes seront suffisantes pour permettre de lire les différentes opérations que cette détermination exigera pour tous les cas.

239. Nous ferons encore usage du plan tangent pour trouver les asymptotes des hyperboles que l'on peut obtenir, ainsi que nous l'avons vu, par des sections planes, faites, soit dans les cônes, soit dans l'hyperboloïde de révolution.

Dans le cas du cône, les asymptotes étant les tangentes aux points de la courbe situés à l'infini, il suffirait de savoir sur quelles génératrices ces points se trouvent, de construire les plans tangents au cône suivant ces génératrices : l'intersection des traces horizontales du plan sécant et du plan tangent donneront immédiatement un point de la projection horizontale de chaque asymptote.

Soit P le plan sécant, toute génératrice non parallèle à P rencontrera ce plan à une distance finie, en telle sorte que les seules génératrices qui pourront correspondre à des points de l'intersection situés à l'infini ne peuvent être contenues que sur les génératrices parallèles au plan P, que nous appellerons I et I′ et que nous construirons avec facilité toutes les fois que les données de la question permettront ce parallélisme; en nous bornant à considérer la seule génératrice I, dont la trace horizontale *i* est sur la trace horizontale du cône, nous obtiendrons la trace HT du plan tangent en menant simplement par le point *i* une tangente à la trace du cône; HT et HP se couperont en un point *p*, qui sera la trace horizontale de l'une des asymptotes; sa projection s'obtiendra en menant par ce point *p* une parallèle A à la génératrice I, car cette parallèle est la seule droite qui puisse rencontrer la courbe d'intersection à l'infini.

Des considérations analogues nous fourniront les asymptotes des hyperboles obtenues dans l'épure LI, qui est relative à la section de l'hyperboloïde de révolution par un plan.

Observons d'abord que si l'on considère un cône de révolution ayant même axe que l'hyperboloïde, qui aurait son sommet au centre de cette surface, et dont une génératrice serait parallèle à l'une de celles de la surface donnée, toutes les génératrices de ce cône seront respectivement parallèles à celles de l'hyperboloïde; ce cône est ce que l'on appelle le cône *asymptote* de la surface, nom qui est d'ailleurs justifié, en ce que chacune des génératrices du cône rencontre à l'infini la génératrice parallèle de l'hyperboloïde, et par conséquent cette surface elle-même.

Cela posé, la détermination de l'asymptote deviendra facile : si nous connaissions la génératrice qui rencontre le plan à l'infini, il nous suffirait de construire le plan tangent en ce point pour que son intersection avec le plan donné soit l'asymptote cherchée.

Pour obtenir les génératrices parallèles au plan donné P (et ce sont évidemment les seules qui puissent être rencontrées par ce plan à l'infini), nous chercherons d'abord quelles sont les génératrices du cône qui sont parallèles à ce même plan; ces génératrices s'obtiennent immédiatement en coupant le cône par le plan R mené parallèlement au plan P par le sommet S du

cône; ses traces sont HR et VR, et les génératrices qu'il renferme étant désignées par I et I' nous trouverons leurs projections en I^h et I'^h; les génératrices parallèles de l'hyberboloïde auront leurs projections horizontales respectivement parallèles à I^h et I'^h, et puisqu'elles doivent être comme toutes les projections horizontales des génératrices de la surface hyperboloïdiqué, parallèles à la projection horizontale du cercle de gorge, elles se trouvent deux à deux projetées en M^h et N^h, et leurs traces horizontales seront a, b, et a', b'.

De ce que les génératrices M et N, dont les traces sont respectivement a et b, sont parallèles, nous pouvons les considérer comme appartenant au même point de la surface vers lequel elles concourent à l'infini, et comme déterminant le plan tangent en ce point; ce plan tangent aura donc pour trace horizontale HR, et son intersection avec le plan P sera l'asymptote cherchée; o est le point d'intersection des deux traces, c'est donc la trace même de cette tangente; et si l'on connaissait le point de tangence, il suffirait de joindre le point o à ce point pour avoir l'asymptote en projection horizontale; ce point de tangence est à l'infini sur la génératrice M, à l'infini sur la génératrice N, il se trouvera aussi à l'infini sur la parallèle O à ces deux génératrices, menée par le point o; l'asymptote n'est donc autre chose que cette parallèle O, dont la projection horizontale s'obtient en menant la parallèle O^h à la projection horizontale M^h de l'une de ces génératrices.

On construirait absolument de la même façon la seconde asymptote O', placée symétriquement par rapport au plan méridien parallèle au plan de l'épure.

CHAPITRE V.

INTERSECTION DES SURFACES COURBES ENTRE ELLES.

C'est surtout en traitant de l'intersection des surfaces courbes entre elles que nous aurons à faire des applications nombreuses de l'emploi des surfaces auxiliaires, coupant autant que possible les surfaces données suivant des lignes d'une facile construction, dont chacun des points de rencontre respectifs fournira un point de l'intersection cherchée.

I. INTERSECTION DES SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES, ENTRE ELLES.

240. S'il s'agit des deux surfaces cylindriques représentées par leurs traces et par quelques-unes de leurs génératrices dans la planche LVIII, il faudra chercher si certaines surfaces ne pourraient pas couper à la fois les deux cylindres suivant des lignes droites, auquel cas la construction de ces lignes pourrait être rapide et leurs intersections promptement déterminées.

Or, on ne peut tracer sur un cylindre d'autres lignes droites que les génératrices, et l'on se trouve ainsi conduit immédiatement à employer une surface qui pourrait à la fois couper l'un et l'autre cylindre suivant une génératrice ; tout plan parallèle aux deux systèmes de génératrices des deux cylindres jouit de cette propriété, en sorte qu'il conviendra d'employer pour surfaces auxiliaires des plans ainsi choisis ; soit donc pris arbitrairement un point *a*, situé d'une manière quelconque dans l'espace, menons par ce point deux droites A et D, respectivement parallèles aux génératrices G et K des deux cylindres donnés ; la ligne qui joint les traces horizontales de ces deux droites est celle à laquelle les traces horizontales des plans auxiliaires devront être parallèles pour que les plans eux-mêmes soient parallèles aux deux systèmes de génératrices à la fois et

par conséquent puissent couper les cylindres suivant leurs génératrices respectives.

HP étant cette direction commune, considérons le plan sécant Q qui aurait sa trace horizontale HQ parallèle à HP; B^h et C^h étant de même les traces horizontales des cylindres, il est évident que les génératrices qui correspondront aux sections faites par le plan Q, auront pour traces horizontales *b*, *c*, *d*, *e*, et que ces génératrices elles-mêmes seront L, M, N, O, dont les projections se voient sur la figure. Ces génératrices se coupent deux à deux en quatre points, dont deux seulement tombent dans les limites du dessin, et déterminent les points *n* et *o* de l'intersection cherchée.

Un autre plan auxiliaire, choisi dans une position analogue à celle du plan Q, fournirait d'autres points de cette même intersection, dont on déterminera ainsi autant de points que l'on voudra, de manière à pouvoir tracer la courbe continue avec toute la précision désirable.

241. Pour être guidé dans ce tracé, il faut absolument apporter une très-grande attention et ne point se tromper entre les nombreux points de rencontre que présente nécessairement la figure; la considération de la tangente devient d'autant plus importante, que ces erreurs sont plus faciles.

Proposons-nous comme exemple, après le tracé des deux courbes J^v et J^h de la planche LVIII, de trouver la tangente au point *m* déterminé en projection horizontale et en projection verticale par la rencontre des deux génératrices G et K. La tangente à l'intersection J du point *m* de l'espace, est à la fois dans les plans tangents en *m*, au premier cylindre et au second; elle est donc l'intersection même de ces deux plans tangents; et comme les projections de la tangente sont tangentes aux projections de la courbe, les projections de l'intersection des deux plans tangents seront respectivement tangentes à J^v en m^v et à J^h en m^h.

Les traces horizontales des deux plans tangents que nous appellerons T et U, sont respectivement tangentes aux traces des cylindres dans les points mêmes qui sont les traces des génératrices G et K; ces deux traces se coupent en un point *p* qui appartient, par conséquent, comme trace, à la tangente

cherchée θ, dont la projection pm^h est dès lors connue. La projection verticale θ^v s'obtient en mettant p en projection verticale sur la ligne de terre en p^v, et θ^v n'est autre chose que $p^v m^v$.

Rien n'aidera mieux au tracé exact de la courbe d'intersection qu'un certain nombre de tangentes construites par les mêmes moyens.

242. La même méthode est applicable sans presque aucune modification pour la recherche de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, ou de deux cônes entre eux.

Quant au cylindre, tout plan parallèle aux génératrices, pourvu que sa trace horizontale rencontre la trace horizontale du cylindre, coupe cette surface suivant deux génératrices. Quant au cône, tout plan dirigé par le sommet et dont la trace horizontale rencontre la trace horizontale ou base du cône, coupe aussi cette surface suivant deux génératrices; cette observation indique suffisamment comment doivent être choisis les plans auxiliaires qui peuvent le plus simplement conduire à la solution.

S'il s'agit d'un cylindre et d'un cône, il faudra que tous les plans auxiliaires passent par les sommets du cône et par une des génératrices du cylindre. Par le sommet s de la surface conique de la planche LIX menons donc une droite A parallèle à la direction commune des génératrices du cylindre; la trace horizontale de cette droite est a, et c'est par ce point que devront passer les traces horizontales, telles que HX de tous les plans auxiliaires. Ce plan X, par exemple, rencontre le cône suivant les deux génératrices G et G′, le cylindre suivant les deux génératrices K et K′, et leurs points de rencontre respectifs fournissent par leurs projections horizontales et verticales que l'on peut lire sur l'épure les quatre points m, n, p, q, de l'intersection des deux surfaces.

On trouvera ainsi autant de points que l'on voudra de la courbe cherchée, qu'il est dès lors facile de construire par points, et on s'aidera d'un certain nombre de tangentes qu'il conviendra de déterminer à l'aide des plans tangents comme dans l'épure précédente, de manière à ne commettre aucune erreur dans le tracé des projections I^h et I^v de la courbe d'intersection I.

243. Si au lieu d'une surface conique et d'une surface cylindrique, les données se composent de deux cônes, les traces horizontales des plans auxiliaires se déterminent avec la même facilité, ainsi qu'on peut le voir sur les planches LX et LXI. Pour que ces plans, en effet, rencontrent chacun des cônes suivant des génératrices, il est nécessaire et suffisant qu'ils passent à la fois par les sommets *t* et *s* des deux cônes qui ont ici pour traces respectives la circonférence C et l'ellipse D; conduisant donc la droite A par les deux sommets, et déterminant la trace *a* de cette droite, c'est par ce point que nous ferons passer les différentes traces horizontales HX des plans auxiliaires X, que nous emploierons; celui de ces plans qui est représenté sur l'épure coupe le cône S suivant les deux génératrices G et G', et le cône T suivant les deux génératrices K et K'; toutes ces génératrices sont dans un même plan, le plan X, et leurs points de rencontre *m*, *n*, *o*, *p*, dont on peut voir les projections sur la figure, sont autant de points de la courbe cherchée qui se compose, ici comme dans le cas précédent, d'une seule branche fermée I, qui se projette en I^h et en I^v.

Les constructions ont été effectuées sur l'épure pour mener la tangente au point *p*, mais il ne faudrait pas dans une épure d'exécution se contenter ainsi d'une seule tangente; la connaissance de ces tangentes, nous ne saurions trop le répéter, étant le meilleur guide pour le tracé exact des courbes d'intersection.

Le point *p* appartient à la fois à la génératrice G du cône S et à la génératrice K' du cône T; chacun de ces cônes a un plan tangent au point *p* et chacun de ces plans, d'après la définition du plan tangent, contient la tangente à la courbe d'intersection I; cette tangente n'est donc autre chose que l'intersection des deux plans tangents dont les traces horizontales HT et HU se confondent avec les tangentes aux bases C et D des cônes, à l'extrémité de chacune des génératrices G et K' du point *p*; ces traces se coupent au point q^h dont la projection q^v est sur la ligne de terre, et l'intersection des deux plans tangents se trouve projetée en p^hq^h, p^vq^v; et nous savons que ces projections de la tangente à la courbe I de l'espace sont respectivement tangentes aux projections I^h et I^v de cette courbe qui sont représentées sur notre épure.

L'intersection de deux cônes pouvant se présenter dans certains cas sous une forme très-différente de celle de la courbe I, nous avons donné dans la planche LXI un nouvel exemple de la détermination qui nous occupe; les constructions sont absolument les mêmes, et il serait sans doute inutile d'en donner une explication nouvelle; nous remarquerons seulement qu'au lieu d'une courbe à double courbure, comme celles que nous ont fournies les planches LIX et LX, nous trouvons ici, comme dans la planche LVIII, deux courbes distinctes; et si l'échelle de notre épure était plus grande, nous reconnaîtrions facilement que ces deux courbes se projettent suivant quatre ellipses, et qu'ainsi les deux cônes se coupent suivant deux courbes planes; nous verrons que l'on peut *a priori* savoir laquelle de ces circonstances se présentera, par l'inspection seule des traces des deux surfaces et de la direction commune à tous les plans auxiliaires.

II. INTERSECTION D'UNE SURFACE CYLINDRIQUE OU CONIQUE AVEC UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.

244. Soient maintenant (pl. LXII) une surface conique dont le sommet est en *s* et la base en T, et un ellipsoïde de révolution défini par le méridien M tournant autour de son grand axe Z; nous supposerons pour plus de simplicité dans la figure que l'axe est vertical, et que le plan vertical qui passe par cet axe et le sommet du cône est parallèle au plan vertical de projection.

En présence de semblables données, ce qu'il faut se demander d'abord, c'est la nature de la surface auxiliaire qu'il convient d'employer pour arriver facilement à la détermination de l'intersection commune des deux surfaces données.

Un plan, pourvu qu'il passe par le sommet du cône, coupera bien le cône donné suivant des génératrices faciles à construire, mais il aura, en général, pour section dans l'ellipsoïde une ellipse dont les projections ne pourraient se déterminer que par points, et une pareille construction de deux ellipses pour construire deux ou au plus quatre points de l'intersection cherchée serait un travail très-long et d'une précision douteuse.

Ce qu'il faut trouver, si cela est possible, c'est une surface qui coupe le cône suivant des génératrices droites, la ligne

droite étant de toutes celles que l'on peut tracer sur un cône la plus facile à construire, et l'ellipsoïde suivant des circonférences de cercles qui se construisent aussi avec facilité et qui ne sauraient être ici que des parallèles de l'ellipsoïde; ces parallèles auraient en outre l'avantage d'être tous placés dans des plans horizontaux, et par conséquent d'avoir pour projections horizontales des courbes identiques à eux-mêmes.

Quoique au premier aperçu il paraisse difficile de trouver une série de surfaces nombreuses qui satisfassent à la fois à ces conditions, en examinant avec plus de soin la question, on reconnaîtra que ces conditions ne sont pas exclusives l'une de l'autre, et que certains cônes peuvent y satisfaire. P en effet étant un des parallèles de l'ellipsoïde, le cône qui aurait pour base ce parallèle, et pour sommet le sommet *s* du cône donné, satisferait évidemment, par construction même, à l'une d'elles; et s'il coupe le cône donné avec lequel il a le sommet commun, il ne pourra le couper non plus que suivant une ou plusieurs génératrices communes. Ce cône, c'est la surface auxiliaire dont nous aurons à nous servir pour résoudre le problème proposé.

Les génératrices de ce premier cône auxiliaire sont déterminées par cette double condition de passer toutes par le point *s*, et respectivement par les différents points du parallèle P; pour en construire la trace horizontale il suffirait de prolonger chacune de ses génératrices, et de chercher la trace horizontale de chacune d'elles, mais dans l'exemple qui nous occupe, cette recherche n'est pas nécessaire; la section faite dans ce cône auxiliaire par le plan du parallèle P est un cercle, ce plan est horizontal comme le plan horizontal de projection, et la section faite dans le cône par ce dernier plan, c'est-à-dire sa trace, devra aussi être un cercle qu'il est dès lors facile de construire; son centre sera en *a*, trace horizontale de la ligne que l'on obtient en joignant s^h à o^h, projection horizontale du centre du parallèle P, et s^v à o^v, projection verticale de ce centre; pour obtenir un des points de la circonférence, il suffira de considérer la génératrice extrême correspondant au parallèle P, et la trace *r* de cette génératrice (B^h, B^v) sera le point cherché; décrivons donc de *a* comme centre avec *ar* pour rayon une circonférence C, cette circonférence sera la trace de notre cône auxiliaire.

Cette opération préliminaire étant terminée, il est facile de

voir que si les deux cônes ont des génératrices communes, leurs traces se rencontreront; et que réciproquement, les points de rencontre de ces traces correspondent à des génératrices communes, telles que la génératrice K, par exemple, dont la projection horizontale rencontre celle P^h du parallèle P en m^h, et dont la projection verticale vient couper P^v en m^v; m^h et m^v sont respectivement deux points des deux projections I^h et I^v de l'intersection cherchée I, dont on peut vérifier également le tracé pour les autres points, sur l'épure de la planche LXII; trois autres points de cette même intersection sont d'ailleurs fournis par cette même courbe C, considérée comme la base de l'un des cônes auxiliaires.

III. INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

245. Deux surfaces de révolution sont données (pl. LXIII) par leurs deux méridiens M et L, et par leurs deux axes Z et Y dont nous supposons le plan parallèle au plan vertical de projection; l'un de ces méridiens est une ellipse M, l'autre est une parabole L; ils se projettent tous deux en vraie grandeur en M^v et L^v, et ils ont pour projection horizontale commune la ligne Z^hL^h qui n'est autre que la trace horizontale du plan vertical qui les contient; les deux axes inclinés l'un sur l'autre se rencontrent en un point *o* de ce plan, qui se projette en o^v et Z^h.

Comment déterminer la courbe d'intersection de ces deux surfaces? L'emploi de plans auxiliaires entraînerait d'interminables lenteurs, car il n'en est aucun qui puisse à la fois couper les deux surfaces de révolution suivant des parallèles, seules courbes qui soient sur une surface de révolution d'une construction facile; un cône auxiliaire ne saurait nous placer dans des conditions meilleures, car par cela seul qu'il aurait un parallèle commun avec l'une des surfaces de révolution il n'en saurait avoir avec l'autre, et par conséquent il entraînerait aussi bien que le plan dans des difficultés considérables.

Une seule surface peut utilement nous servir dans ces circonstances, et cette surface est une sphère qui aurait pour centre le point de rencontre des deux axes. Il est facile de voir, en effet, qu'une telle surface coupera l'une et l'autre des sur-

faces données suivant des parallèles qui, d'après la disposition de notre figure, se projetteront verticalement suivant des lignes droites, et qu'il ne sera nécessaire de considérer en projection horizontale que ceux de la surface dont l'axe est vertical et qui se projettent par conséquent suivant des circonférences identiques aux parallèles.

Mais d'abord, démontrons que les intersections faites par la sphère du rayon $o^v r^v$ par exemple, dans l'ellipsoïde, est le parallèle P. Tous les points de la sphère sont distants du point o d'une longueur égale à son rayon ρ ou or, et il n'existe dans l'espace aucun autre point que ceux de cette sphère qui soient à cette distance ρ du point o; tous les points donc, qui sur l'ellipsoïde seront à cette même distance du point o appartiendront également à la sphère, et ces points sont tous ceux du parallèle P, qui sont tous également distants d'un point quelconque o de l'axe Z. On démontrerait de la même façon que la section faite dans le paraboloïde par la sphère du rayon ρ serait le parallèle Q qui se projette verticalement en Q^v.

Si nous pouvons obtenir facilement les points d'intersection, quand il y en a, du parallèle P avec le parallèle Q, nous nous serons procuré par cela même un égal nombre de points de l'intersection des deux surfaces de révolution données; P^v et Q^v se rencontrent en m^v; P^v a pour projection horizontale la circonférence P^h, il suffira donc de mettre m^v en projection horizontale sur P^h pour obtenir en m^h et m'^h, des projections de deux points de l'intersection cherchée.

D'autres points tels que b^h, b'^h étant obtenus de la même manière par l'emploi de différentes sphères auxiliaires ayant toutes leurs centres en o et des rayons différents, il suffira de joindre ces points par un trait continu, pour avoir sur l'épure les projections C^h et C^v de l'intersection cherchée C.

246. Pour construire la tangente au point m, il faudrait chercher les deux plans tangents en ce point aux deux surfaces données; l'intersection θ de ces deux plans serait la tangente à la courbe d'intersection C. On arriverait ainsi à la détermination de la tangente par des moyens analogues à ceux que nous avons employés dans les épures relatives à l'intersection des surfaces

cylindriques et coniques; mais les plans tangents aux surfaces de révolution ne s'obtiennent pas, ainsi que nous l'avons vu (234), avec la même facilité, et il ne sera pas inutile d'indiquer comment on peut construire ici la tangente au point m d'une manière plus simple.

Encore bien que dans ce traité élémentaire nous n'ayons point parlé de la *normale* à une surface, qui n'est autre chose que la perpendiculaire au plan tangent, élevée par le point de contact, on démontre en géométrie que si le même point m appartient à la fois à deux surfaces S et T, la tangente à la courbe d'intersection au point m est perpendiculaire au plan des deux normales μ et ν à ce même point m.

Si donc nous pouvions, dans le cas qui nous occupe, construire les deux normales μ et ν, il nous suffirait de faire passer par ces deux normales un plan N, auquel on donne le nom de *plan normal* de la courbe C, et d'élever au point m une perpendiculaire sur ce plan; cette perpendiculaire sera la tangente à la courbe C au point m.

La normale en r^v étant la perpendiculaire au plan tangent en ce point, cette normale n'est autre chose que $d^v r^v$ perpendiculaire à la tangente $r^v a^v$ à la courbe méridienne, qui peut être considérée comme la trace verticale du plan tangent. Or, si l'on imagine une série de ces normales en tous les points du parallèle P, pour raison de symétrie, ces normales iront toutes concourir au même point d de l'axe Z; par conséquent nous obtiendrons les projections de la normale en m^v en joignant d^v à m^v et Z^h à m^h, nous aurons ainsi les projections ν^h et ν^v de la normale ν à l'ellipsoïde au point m. La même considération nous conduira à trouver en $m^v c^v$, $m^h c^h$, les deux projections μ^v et μ^h de la normale μ en ce même point au paraboloïde donné, au moyen de la tangente $\beta^v s^v$ et de la normale $c^v s^v$ à la courbe méridienne L^v, au point s^v du parallèle Q^v.

Les deux normales μ et ν étant ainsi connues par leurs projections, rien n'est plus simple que de construire le plan normal N qui les contient et dont les traces HN et VN sont indiquées sur notre figure LXIII.

En abaissant respectivement de m^h et m^v des perpendiculaires sur HN et VN, nous obtenons enfin les deux projections θ^h et θ^v de la tangente θ à la courbe d'intersection C au point m.

IV. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES PROBLÈMES D'INTERSECTION DES SURFACES COURBES ENTRE ELLES.

247. On a pu remarquer dans les six dernières planches que nous avons consacrées aux intersections réciproques des surfaces courbes, que tantôt nous obtenions deux courbes, tantôt une seule, suivant certaines dispositions particulières des données, et il ne sera pas inutile de nous arrêter un instant sur ces circonstances et de voir comment elles se trouvent géométriquement exprimées sur les épures; la seule inspection des éléments à l'aide desquels les surfaces sont définies sur le dessin, suffit immédiatement pour s'en rendre compte.

Imaginons pour un instant qu'un cylindre très-limité en dimensions transversales soit tellement placé qu'il rencontre un cylindre beaucoup plus gros, on voit immédiatement que l'intersection de ces deux surfaces se composera d'une courbe d'entrée et d'une courbe de sortie ; si le petit cylindre pénètre tout entier dans le second, chacune des génératrices qui a fourni un point de la courbe d'entrée donnera un point de la courbe de sortie, parce qu'après avoir pénétré dans le cylindre il arrivera toujours qu'elle en sortira après avoir été suffisamment prolongée, quelque grand que l'on suppose le second cylindre.

C'est là le cas de notre planche LVIII, dans laquelle cependant l'exiguïté du cadre n'a pas permis de tracer les deux courbes en projection horizontale; la deuxième même n'est qu'indiquée en projection verticale en I^v. Si nous jetons les yeux sur les traces successives telles que HQ, nous voyons que toutes celles qui rencontrent la trace C^h, viennent couper la trace B^h du deuxième cylindre ; c'est à cette circonstance qu'est due la séparation entre la courbe d'entrée et la courbe de sortie ; toutes les fois qu'elle se présente on peut être assuré de l'existence de ces deux courbes.

Du mode de construction que nous avons indiqué il résulte qu'il ne saurait y avoir aucun point de l'intersection qui correspondît à toute trace d'un plan auxiliaire qui ne rencontrerait pas l'une et l'autre des traces des deux surfaces cylindriques ou coniques ; la dernière trace qui puisse servir à cette détermina-

tion serait celle qui, étant tangente à l'une des courbes, viendrait rencontrer l'autre, soit en un point de tangence, soit en plusieurs points d'intersection; les plans ainsi définis sont ce que l'on appelle les plans limites.

Toutes les fois que, comme dans la planche LIX, l'un des plans auxiliaires *limites* a pour trace une droite tangente à la fois aux deux traces des cylindres, les courbes d'entrée et de sortie ne sont plus séparées entre elles, et l'on n'obtient plus qu'une courbe d'intersection formée de deux portions qui se réunissent en un point unique qui correspond à la trace tangente; on dit alors que l'intersection est une courbe à point multiple, et c'est toujours à une courbe de cette nature que l'on est conduit lorsque l'une des traces des plans auxiliaires présente la circonstance que nous venons de définir.

Dans le cas de la figure LX, où il s'agit de l'intersection de deux cônes, nous retrouvons encore une courbe d'entrée et une courbe de sortie distinctes, parce qu'au delà de chacune des traces tangentes à l'une des traces, il y a une portion de la trace du deuxième cône pour laquelle il ne saurait exister de points de la courbe; on conçoit en effet que l'intersection ne saurait être continue, puisque les points qui correspondent à la première courbe sont nécessairement séparés de ceux qui appartiennent à la seconde, par toute la portion du cône qui correspond à la partie de la trace horizontale qui est placée en dehors des traces limites.

Dans la planche LXI qui est encore relative à l'intersection de deux cônes, les données sont telles, que les traces limites sont l'une et l'autre tangentes à la fois aux deux courbes données comme traces; il en résulte deux points multiples, mais dans ce cas, toutes les fois que les traces des cônes donnés sont des courbes du second degré, on démontre que la courbe à deux points multiples est formée de deux courbes planes du second degré qui se croisent.

La planche LXII, qui est consacrée à l'intersection d'un cône et d'un ellipsoïde, réalise une autre circonstance relative à l'intersection des surfaces courbes; le cône ne pénètre qu'en partie dans la surface de révolution, sur le bord de laquelle elle enlèverait seulement une partie continue si on voulait matériellement l'y assujettir; on dit alors qu'il y a arrachement, et dans

les problèmes d'intersection des cônes et des cylindres par exemple, cette circonstance serait annoncée en ce que les traces limites ne comprendraient qu'en partie l'une et l'autre des traces des surfaces qui se coupent; dans une pareille disposition, en effet, les points de la courbe se trouveraient disposés d'une manière continue par rapport à l'un et à l'autre des systèmes de génératrices.

Enfin, la planche LXIII réalise une autre circonstance encore, en ce que les surfaces de révolution pouvant être dans certains sens limitées, il n'est pas nécessaire qu'elles traversent la surface qu'elles ont une fois rencontrée; le paraboloïde de cette planche offre bien une courbe de pénétration dans l'ellipsoïde, mais il n'existe pas de courbe de sortie, parce que cette surface se termine dans l'intérieur même de l'ellipsoïde; une pareille disposition ne pourrait se rencontrer dans la pénétration par un cône ou par un cylindre, parce que ces surfaces, considérées géométriquement, sont toujours indéfinies.

248. Nous ajouterons encore en terminant quelques mots sur la ponctuation des courbes auxquelles ces six dernières planches nous ont conduit.

En ce qui concerne les cônes et les cylindres, rien n'est plus facile que d'être fixé à cet égard, d'après les indications que nous avons données précédemment; toute génératrice en effet est visible ou invisible, suivant qu'elle est placée par rapport à l'œil situé dans l'angle antérieur supérieur, soit au-dessus du cylindre s'il s'agit de sa projection horizontale, soit en avant de la surface s'il s'agit de sa projection verticale.

Cela posé, il est évident que si un point m par exemple, est à la fois sur une génératrice *visible* de la première surface et sur une génératrice *invisible* de la seconde, par rapport au plan de projection que l'on considère, ce point devra se trouver dans la portion ponctuée de la courbe, car il sera caché comme la génératrice invisible elle-même; à plus forte raison s'il s'agit d'un point n, situé à la fois sur deux génératrices invisibles. Ce ne sera donc que quand les deux génératrices qui se rencontrent seront à la fois visibles, que leur point d'intersection devra appartenir à la portion de la courbe d'intersection qu'il conviendra de tracer en ligne pleine; cette règle a été invariablement

suivie dans tous nos tracés, et l'on remarquera qu'il doit nécessairement en résulter que la séparation sur l'épure entre la partie pleine et la partie ponctuée doit toujours s'effectuer sur un point appartenant pour chaque surface aux génératrices limites.

Ce que nous venons de dire par rapport aux génératrices droites des cônes et des cylindres s'applique d'ailleurs à toute autre ligne tracée, soit sur ces surfaces, soit sur une surface de révolution; si par le point que l'on considère on trace sur l'une et l'autre surface deux courbes quelconques, ce point n'appartiendra en projection à la portion visible de la courbe qu'autant qu'il sera situé à la fois sur une portion visible de chacune de ces courbes; les projections limites des surfaces seront toujours les lignes au contact desquelles la ponctuation devra changer.

Le tracé des courbes d'intersection avec la ponctuation convenable, servira puissamment à déterminer ensuite le mode de tracé qu'il conviendra d'affecter à chacune des lignes qui servent à représenter sur l'épure les données mêmes de la question.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

DÉFINITIONS, LECTURE, NOTATIONS.

	Pages.	Numéros.	Planches.
Considérations générales	1		«
I. Représentation du point	2		I.
Définition de ce que l'on entend par projection et ligne projetante	3	3	»
La distance entre l'une des projections d'un point à la ligne de terre est égale à la distance du point lui-même à l'autre plan de projection	4	5	
Rabattement du plan vertical	5	6	»
Alphabet du point	6	8	
Les deux projections d'un point sont placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre	7	9	»
II. Représentation de la droite	10		»
Du plan projetant la droite	10	12	»
La projection d'une droite est toujours une ligne droite	10	13	»
Alphabet de la droite	11	14	»
Traces d'une droite	12	16	»
III. Problèmes relatifs à la droite	13		»
Détermination des traces	13	17	»
Droites qui se rencontrent	14	18	II.
Droites parallèles	15	19	»

	Pages.	Numéros.	Planches.
IV. Représentation du plan	17		»
Représentation du plan par ses traces	17	20	III.
Alphabet du plan	17	21	»
V. Problèmes sur le plan et sur la droite	21		IV.
Condition pour qu'un point soit situé dans un plan	21	27	»
Condition pour qu'une droite soit située dans un plan	23	30	»
Faire passer un plan par deux droites ou par trois points	23	32	»
Condition pour qu'une droite soit parallèle à un plan	24	33	V.
Mener une parallèle à un plan	25	34	»
Par un point donné mener un plan parallèle à une droite donnée	25	35	»
Par une droite donnée mener un plan parallèle à une droite donnée	26	36	»
Condition du parallélisme de deux plans	26	37	»
Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné	26	38	»
Condition pour qu'une droite et un plan soient perpendiculaires l'un à l'autre	27	39	VI.
Mener par un point donné une perpendiculaire à un plan	27	40	»
Mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite donnée	28	41	»
Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée	29	43	»
Par un point donné mener un plan perpendiculaire à un plan donné	29	44	»
Par une droite donnée mener un plan perpendiculaire à un plan donné	30	45	»
VI. Représentation des lignes courbes	30		»
Cylindre projetant	33	49	»
Détermination des traces	33	51	»
VII. Représentation des surfaces courbes	35		VII.
Définition de la surface cylindrique	35	53	»
Définition de la surface conique	35	54	»
Définition de la surface de révolution	36	54 *bis*.	»
a. Représentation du cylindre	38	58	»
Étant donnée la directrice d'un cylindre, trouver sa trace	39	58 *bis*.	»
Reconnaître si un point donné appartient à un cylindre donné	39	59	»
b. Représentation du cône	40	60	»
Étant donnée la directrice d'un cône, trouver sa trace	40	60	»
Reconnaître si un point donné appartient à un cône donné	41	61	»
c. Représentation de la surface de révolution	41	62	»
VIII. Notations	42	63 à 69	»

LIVRE II.

PROBLÈMES DE POSITION RELATIVE DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

	Pages.	Numéros.	Planches.
CHAPITRE I. Méthode générale des changements de plans	46		»
Considérations préliminaires	46		»
Règles pour effectuer les changements de plan.	49	74	VIII.
Observation sur le sens dans lequel les distances doivent être portées	50	75	»
I. Changer de plan par rapport à une droite	54	76	»
II. Prendre un nouveau plan de projection parallèle à une ligne donnée	54	81	IX.
III. Une droite parallèle à l'un des plans de projection étant donnée, prendre un nouveau plan de projection qui soit perpendiculaire à cette droite	54	83	»
IV. Une droite quelconque étant donnée, obtenir un système de plans de projection, tel que l'un d'eux soit perpendiculaire à cette droite	55	84	»
V. Changer de plan par rapport à un plan	56	85	X.
VI. Prendre un nouveau plan de projection perpendiculaire à un plan donné	58	89	XI.
VII. Un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection étant donné, prendre un nouveau plan de projection perpendiculaire à ce plan donné	59	90	»
VIII. Un plan quelconque étant donné, obtenir un système de plans de projection, tel que l'un d'eux soit parallèle au plan donné	60	91	»
Remarques générales sur l'usage des changements de plan	60	92	»
CHAP. II. Problèmes de position relative du point, de la droite et du plan, par la méthode des changements de plan			
Problème I. Trouver la distance entre deux points donnés	64	95	XVI.
Problème II. Trouver la distance d'un point à un plan	66	98	XVIII.
Problème III. Trouver la plus courte distance d'un point à une droite	70	102	XX.

	Pages.	Numéros.	Planches.
Problème IV. Construire la plus courte distance de deux droites	75	107	XXII.
Problème V. Construire l'angle de deux droites.			
Solution à l'aide du plan des deux droites	79	111	XXIV.
Solution par trois changements de plan	82	115	XXVI.
Problème VI. Construire l'angle de deux plans..			
Solution par l'angle de deux droites	84	119	»
Solution par trois changements de plan	86	120	XXVIII.
Solution à l'aide de l'intersection des deux plans	87	123	»
Construire les angles d'un plan avec les plans de projection	88	124	XXXII.
Problème VII. Construire l'angle d'une droite et d'un plan			
Solution par l'angle de deux droites	89	125	»
Solution par trois changements de plan	90	126	XXX.
Solution à l'aide d'un plan perpendiculaire au plan donné	92	129	»
Construire les angles d'une droite avec les plans de projection	93	130	XXXIII.
CHAP. III. Méthode générale des mouvements de rotation	95		»
Règles pour effectuer les mouvements de rotation d'un ou plusieurs points	95	131	XII.
I. Faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection	99	132	XIII.
II. Faire tourner une droite autour d'un axe de manière à la rendre parallèle à l'un des plans de projection	103	137	»
III. Une droite parallèle à l'un des plans de projection étant donnée, amener, par un mouvement de rotation, cette droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection	104	138	»
IV. Une droite quelconque étant donnée, amener, par des mouvements de rotation, cette droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection	105	139	»
V. Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection	106	140	XIV.
VI. Faire tourner un plan autour d'un axe de manière à le rendre perpendiculaire à l'un des plans de projection	109	146	XV.
VII. Un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection étant donné, l'amener à être parallèle à l'autre plan de projection	110	147	»
VIII. Un plan quelconque étant donné, amener			

	Pages.	Numéros.	Planches.
ce plan à être perpendiculaire à l'un des plans de projection	111	**148**	»
Exposé succinct de la méthode générale des mouvements de rotation	112	**149**	»
CHAP. IV. Problèmes de position relative du point de la droite et du plan, par la méthode des mouvements de rotation	116		»
Problème I. Trouver la distance entre deux points donnés	116	**150**	XVII.
Problème II. Trouver la distance d'un point à un plan	117	**152**	XIX.
Problème III. Trouver la distance d'un point à une droite	118	**153**	XXI.
Problème IV. Construire la plus courte distance de deux droites	121	**156**	XXIII.
Problème V. Construire l'angle de deux droites.			
Solution par trois mouvements de rotation	124	**159**	XXVII.
Solution à l'aide du plan de deux droites	127	**161**	XXV.
Problème VI. Construire l'angle de deux plans..			
Solution par l'angle de deux droites	128	**162**	»
Solution par trois mouvements de rotation	128	**163**	XXIX.
Solution à l'aide de l'intersection des deux plans	130	**164**	»
Construire les angles d'un plan avec les plans de projection	131	**164** *bis.*	XXXII.
Problème VII. Construire l'angle d'une droite et d'un plan			
Solution par l'angle de deux droites	131	**165**	»
Solution par trois mouvements de rotation	132	**166**	XXXI.
Solution à l'aide d'un plan perpendiculaire au plan donné	134	**167**	»
Construire les angles d'une droite avec les plans de projection	135	**168**	XXXIII.

LIVRE III.

INTERSECTIONS DES LIGNES ET DES SURFACES.

CHAPITRE I. Intersection des plans entre eux	137		»
Détermination de l'intersection de deux plans par les points d'intersection de leurs traces	137	**170**	XXXIV.
Solution par l'emploi de plans auxiliaires	139	**175**	XXXV.
Solutions diverses pour les cas dans lesquels les traces ne se rencontrent pas sur l'épure	142	**176**	XXXVI.
Solution par deux changements de plan	145	**178**	XXXVII.
Solution par deux mouvements de rotation	146	**179**	»
CHAP. II. Intersection des lignes et des plans	147		»

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PLANCHES

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET
RUE DE VAUGIRARD, 9

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR H. TRESCA

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

RÉDIGÉ

conformément au dernier Programme d'admission à cette École

D'APRÈS LES OUVRAGES ET LES LEÇONS

DE TH. OLIVIER

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS ET A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

PLANCHES

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

RUE PIERRE SARRAZIN, N° 14

(Près de l'École de Médecine)

1852

TABLE DES PLANCHES.

LIVRE PREMIER.

Planches.		Numéros.
I.	— Fig. 1. Alphabet du point	8
	Fig. 2 à 8. Alphabet de la droite	14
II.	— Fig. 1. Point situé sur une droite	16
	Fig. 2 à 4. Droites qui se rencontrent	17
	Fig. 3. Droites non situées dans un même plan	17
	Fig. 5 et 6. Droites parallèles	19
III.	— Fig. 1 et 2. Représentation du plan	20
	Fig. 3 à 8. Alphabet du plan	21
IV.	— Fig. 1 et 2. Point situé dans un plan	27
	Fig. 3 et 4. Droite située dans un plan	30
	Fig. 5 et 6. Faire passer un plan par deux droites ou par trois points	32
V.	— Fig. 1. Condition pour qu'une droite soit parallèle à un plan	33
	Fig. 2. Par un point donné mener une parallèle à un plan	33
	Fig. 3. Par un point donné mener un plan parallèle à une droite.	35
	Fig. 4. Sur une droite donnée mener un plan parallèle à une droite	35
	Fig. 5. Condition pour que deux plans soient parallèles	37
	Fig. 6. Par un point donné mener un plan parallèle à un plan.	38
VI.	— Fig. 1. Mener par un point donné une perpendiculaire à un plan	40
	Fig. 2. Mener par un point donné un plan perpendiculaire à une droite, ou abaisser sur cette droite une perpendiculaire	41
	Fig. 3. Par un point donné mener un plan perpendiculaire à un plan	44
	Fig. 4. Par une droite donnée mener un plan perpendiculaire à un plan	45
VII.	— Fig. 1. Représentation du cylindre	58
	Fig. 2. Représentation du cône	60
	Fig. 3 et 4. Représentation de la surface de révolution	62

LIVRE II.

VIII.	— Fig. 1 et 2. Changer de plan par rapport à un point	74
	Fig. 3 à 5. Changer de plan par rapport à une droite	75
IX.	— Fig. 1. La projection de la droite est perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre	80

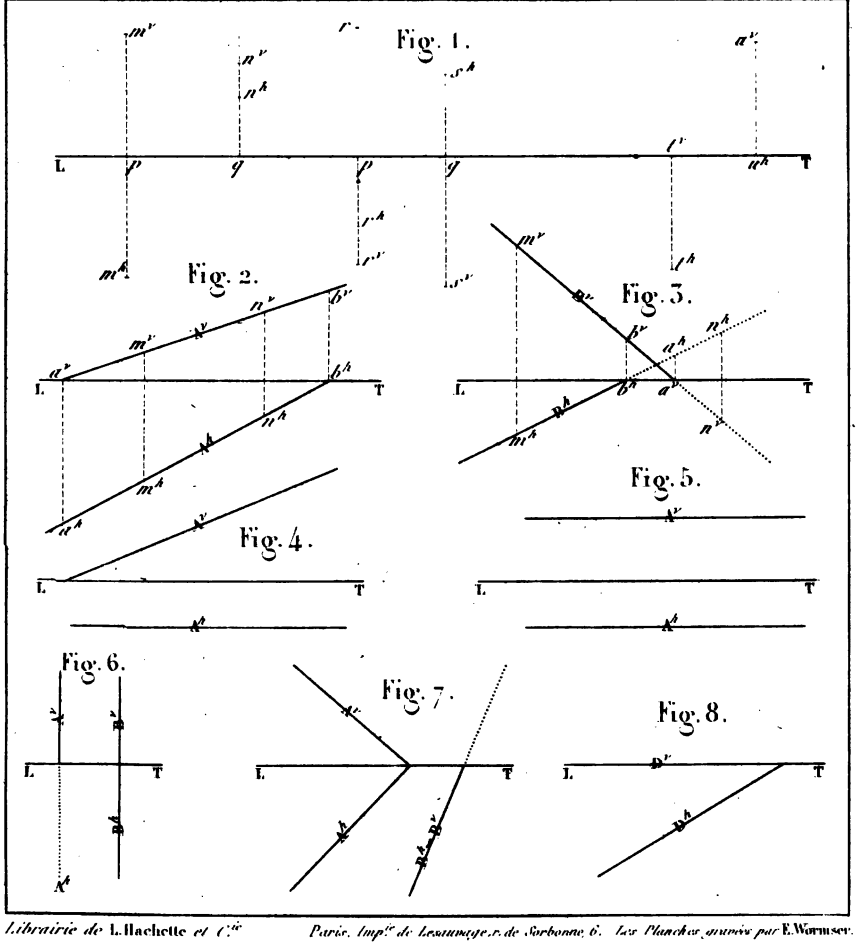
Planches. Numéros.

XXXVII.—Fig. 1. Solution par deux changements de plan..... 178
Fig. 2. Solution par deux mouvements de rotation..... 179
XXXVIII.—Fig. 1 à 3. Intersection d'une droite et d'un plan par l'emploi d'un plan auxiliaire..... 180
XXXIX. —Fig. 1. Solution par un changement de plan..... 183
Fig. 2. Solution par un mouvement de rotation..... 184
XL. — Intersections de trois droites parallèles par un plan..... 185
XLI. — Intersections de trois droites concourant en un même point par un plan..... 190
XLII. — Section d'un cylindre vertical par un plan perpendiculaire au plan vertical..... 193
XLIII. —Section droite d'un cylindre oblique..... 196
XLIV.—Section d'un cône droit dont l'axe est vertical, par un plan perpendiculaire au plan vertical..... 203
XLV. —Section plane d'un cône quelconque..... 206
XLVI.—Développement des cylindres des planches XLII et XLIII..... 200
XLVII. —Développement du cône de la planche XLIV..... 205
XLVIII.—Section de l'ellipsoïde de révolution pour un plan perpendiculaire au plan vertical..... 208
XLIX. — Section de l'ellipsoïde de révolution par un plan quelconque. 210
L. — Section plane de l'hyperboloïde de révolution (section elliptique)..... 211
LI. — Section plane de l'hyperboloïde de révolution (sections hyperboliques)..... 211
LII. — Plan tangent au cylindre par un point pris sur sa surface..... 230
LIII. — Plan tangent au cylindre par un point pris sur sa surface et parallèlement à une droite donnée..... 231
LIV. — Plan tangent au cône par un point pris sur sa surface..... 233
LV. — Plan tangent au cône par un point extérieur et parallèlement à une droite donnée..... 233
LVI. — Plan tangent à la surface de révolution par un point pris sur cette surface..... 234
LVII. — Plan tangent à l'hyperboloïde de révolution par un point pris sur sa surface..... 235
LVIII. — Intersection de deux cylindres (courbes de pénétration)..... 240
LIX. — Intersection d'un cylindre et d'un cône (courbe d'arrachement). 242
LX. — Intersection de deux cônes (courbes de pénétration)..... 243
LXI. — Intersection de deux cônes (deux courbes planes)..... 243
LXII. — Intersection d'un cône et d'un ellipsoïde de révolution (courbe d'arrachement)..... 244
LXIII. — Intersection d'un ellipsoïde et d'un paraboloïde de révolution (courbe de pénétration)..... 245

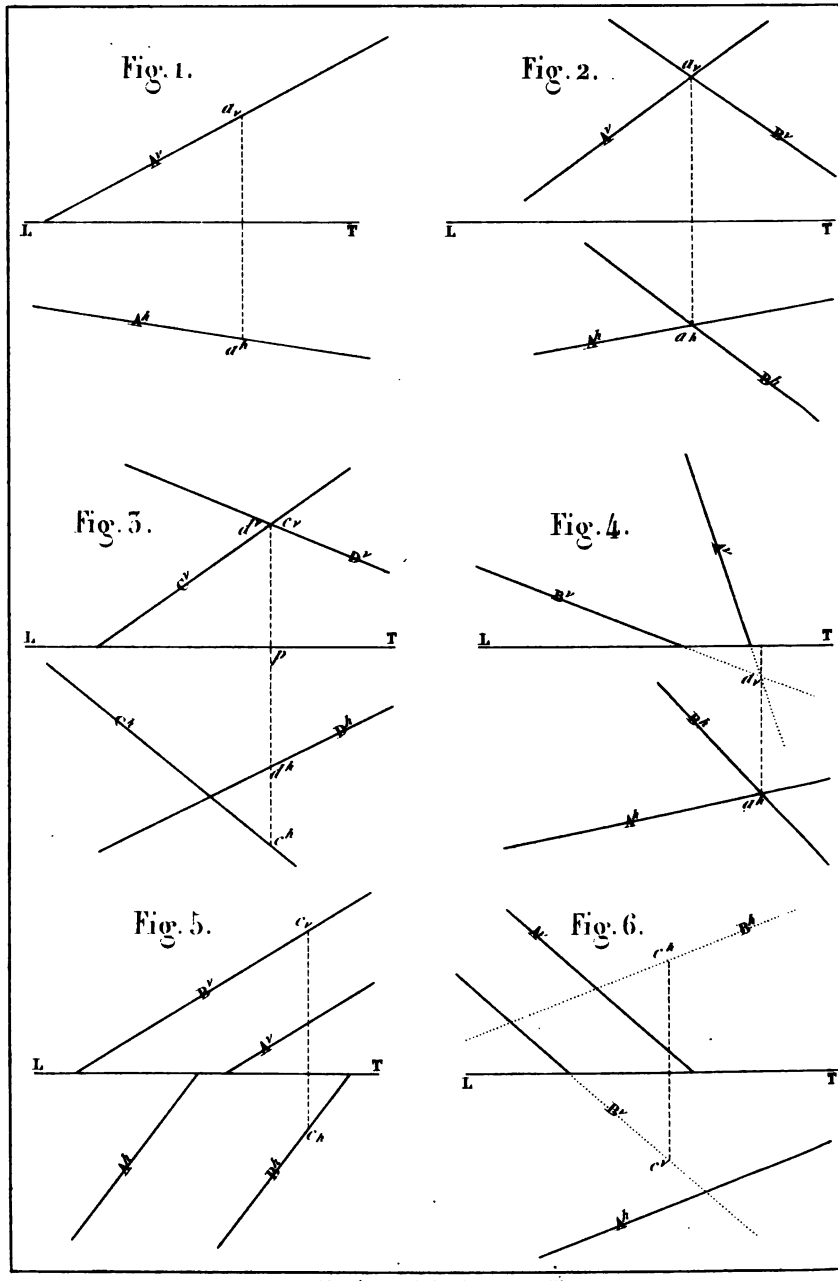
FIN DE LA TABLE DES PLANCHES.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

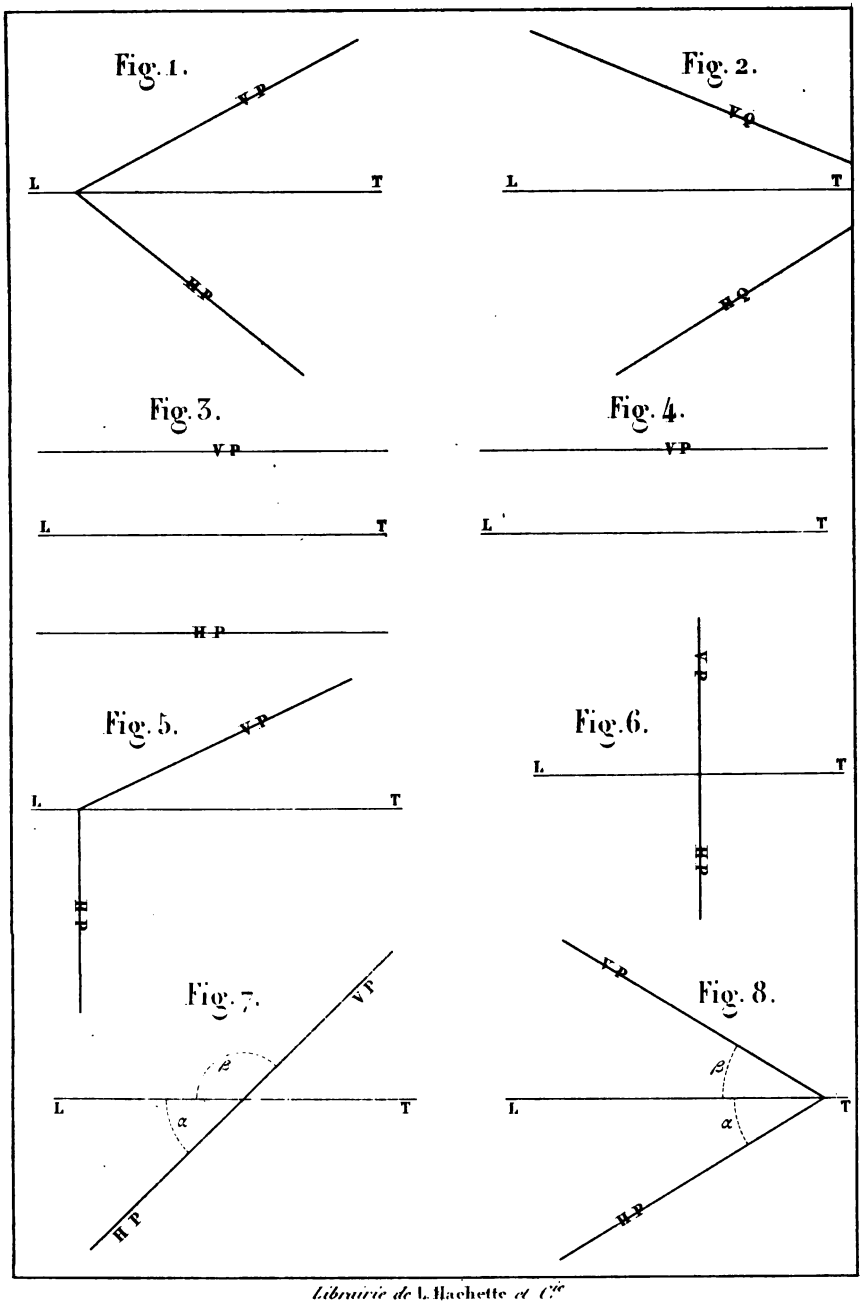
PLANCHES.



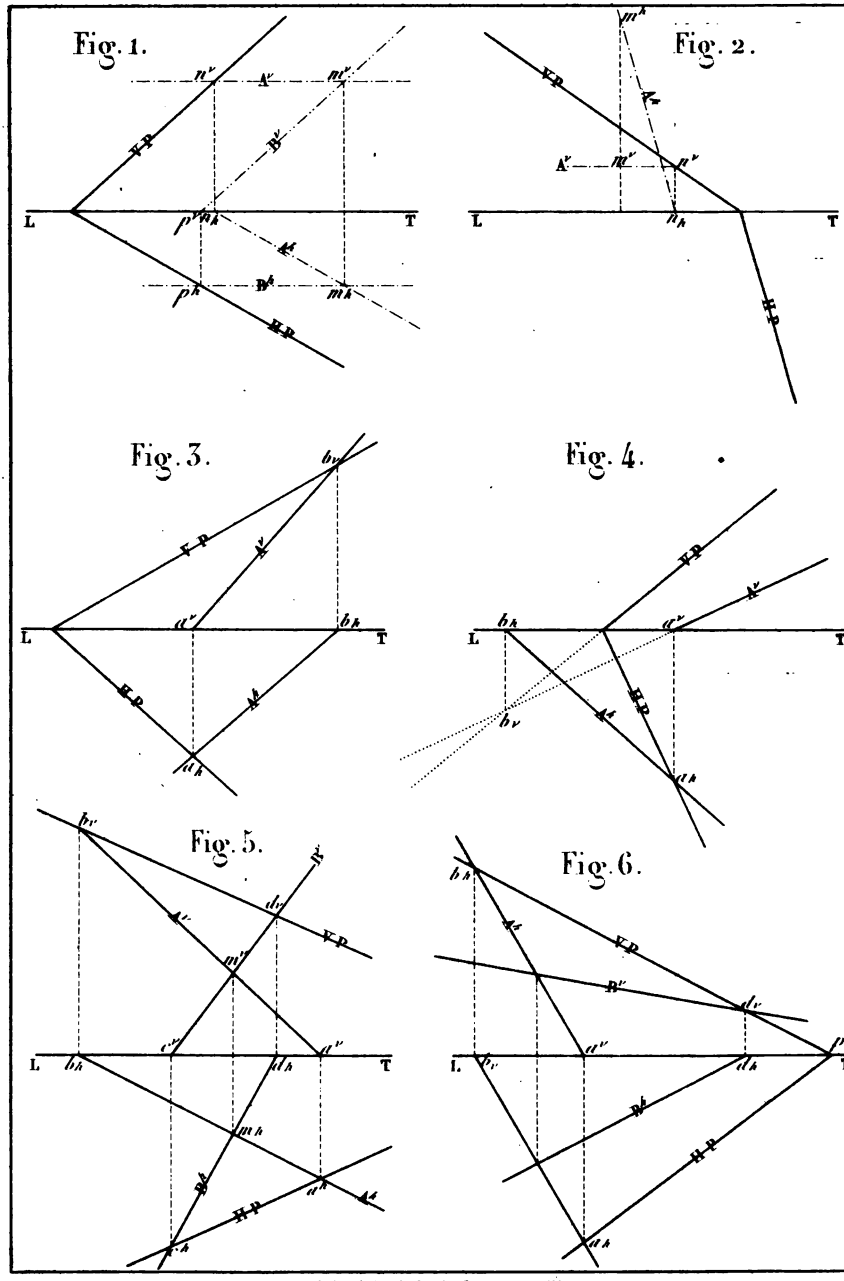
Librairie de L. Hachette *et Cie* *Paris. Imp.ie de Lesumage, r. de Sorbonne, 6. Les Planches gravées par* E. Wormser.



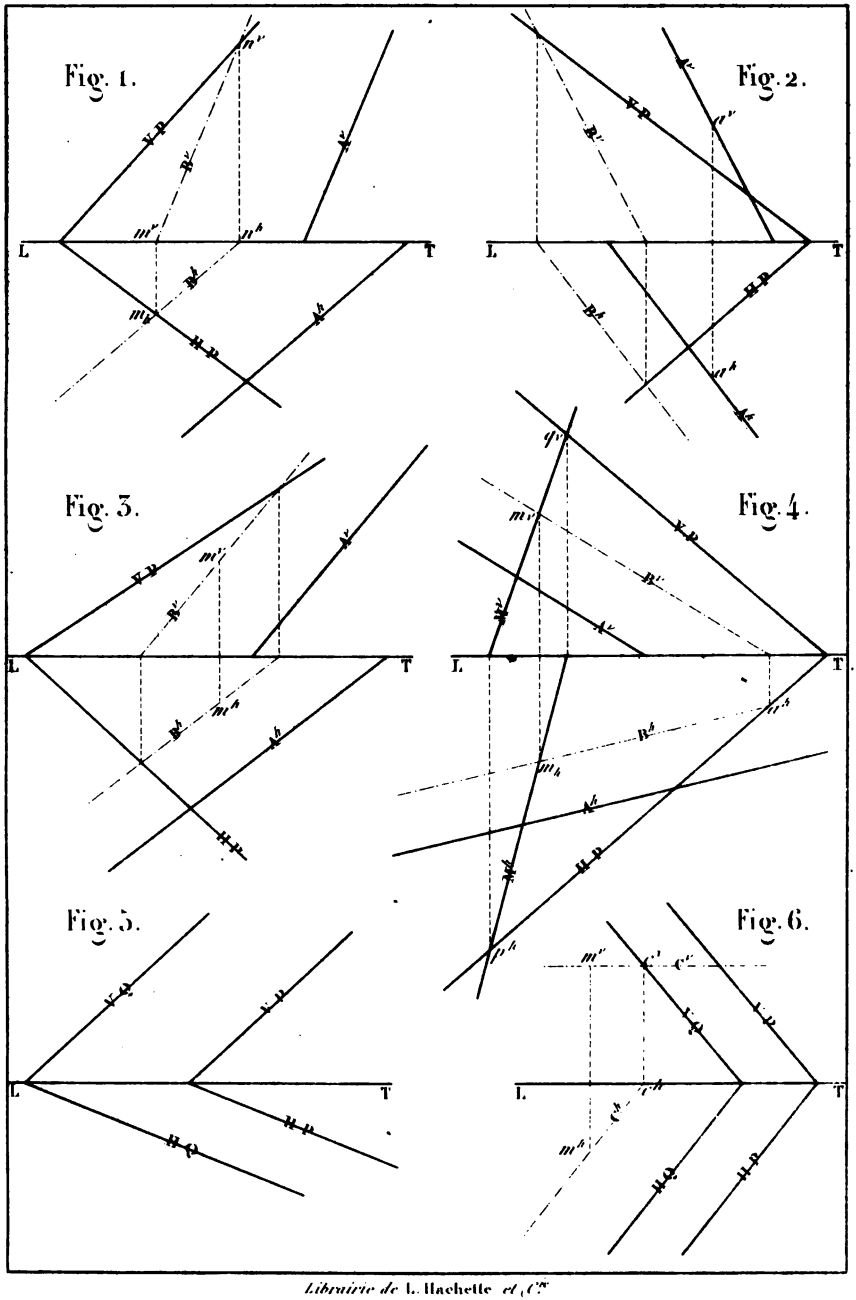
Librairie de L. Hachette et Cie



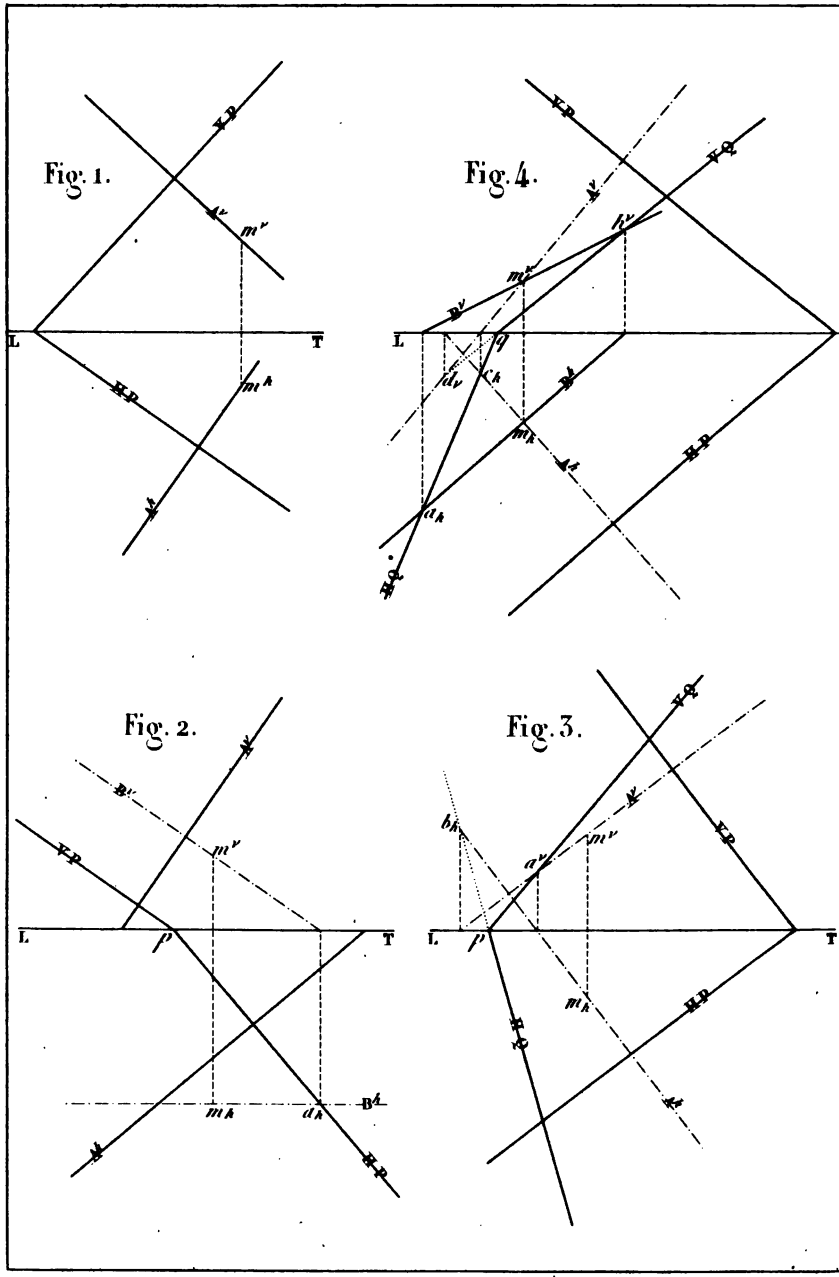
Librairie de L. Hachette et Cie



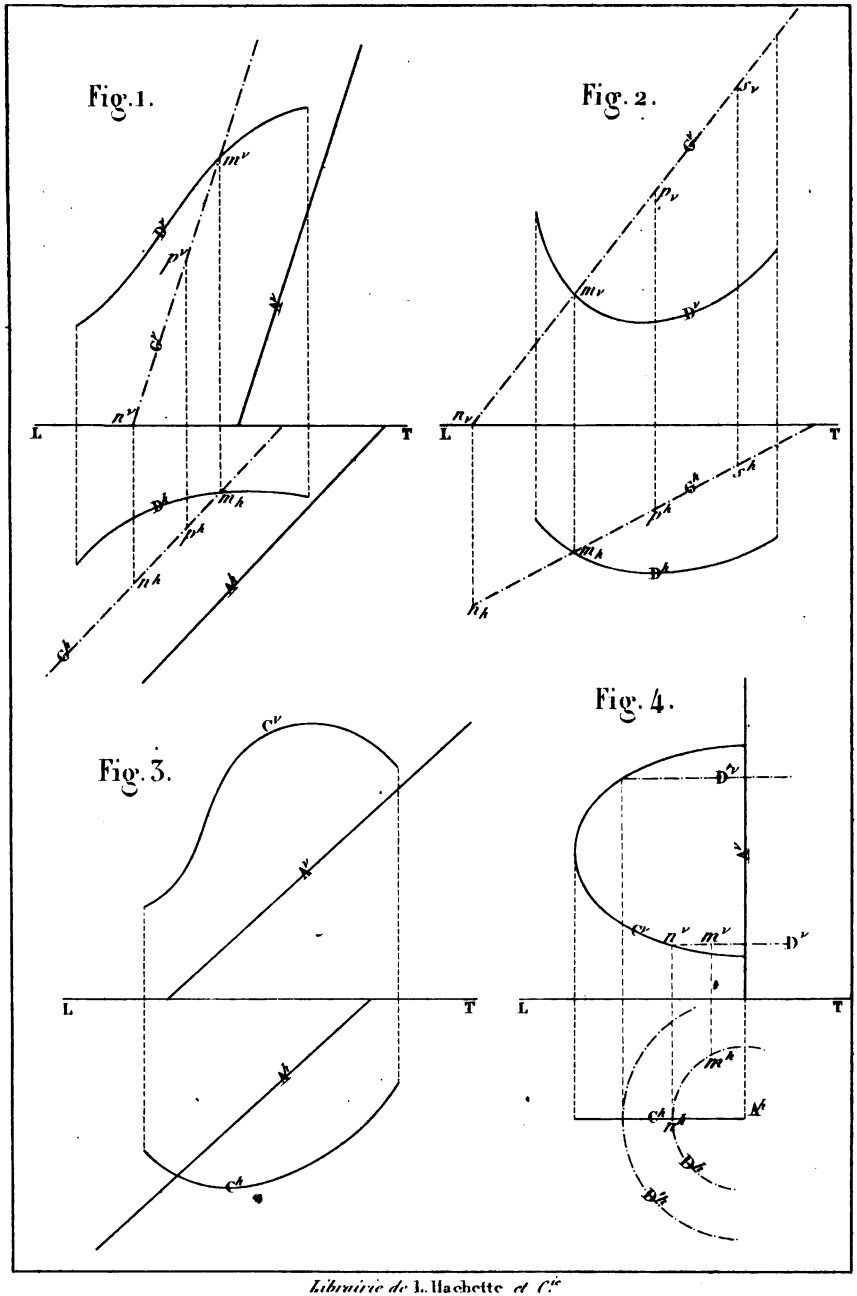
Librairie de L. Hachette et Cie



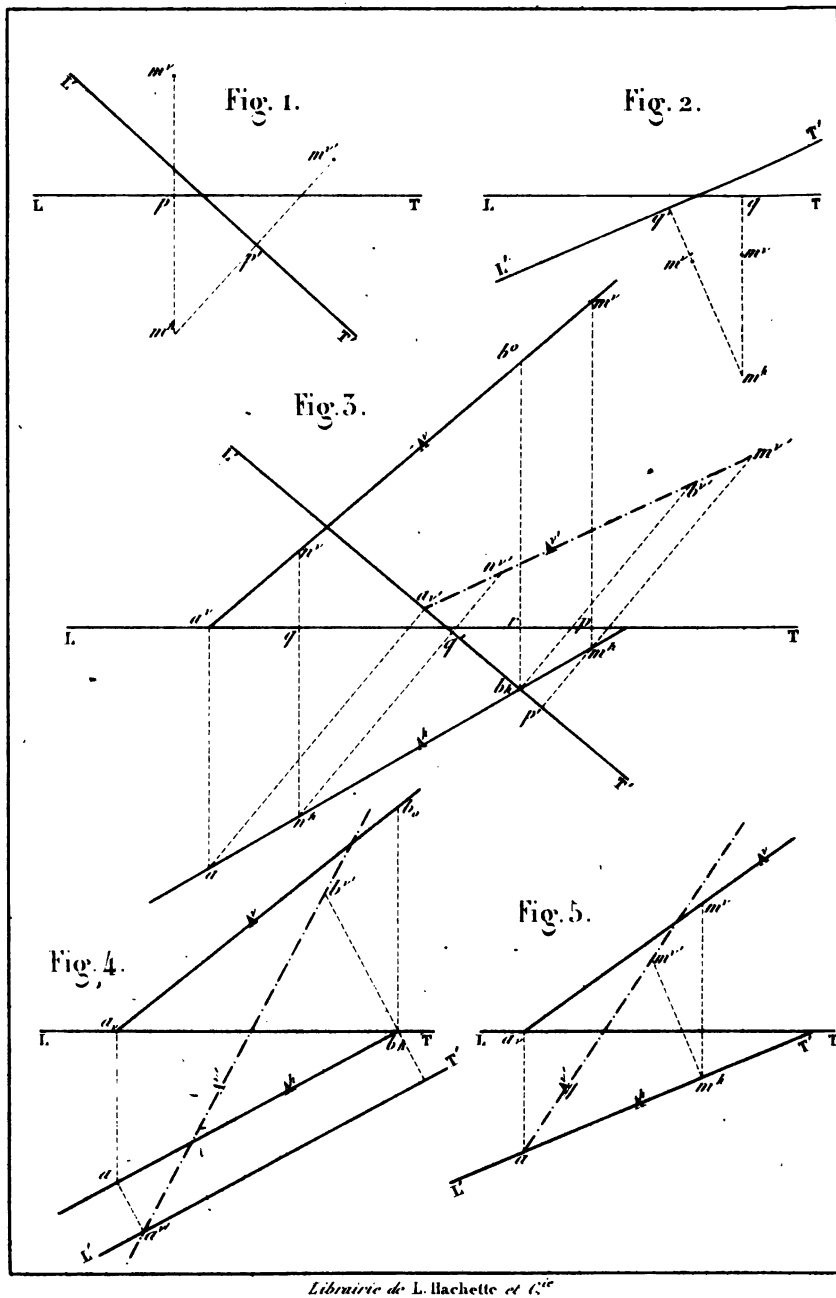
Librairie de L. Hachette *et* Cie



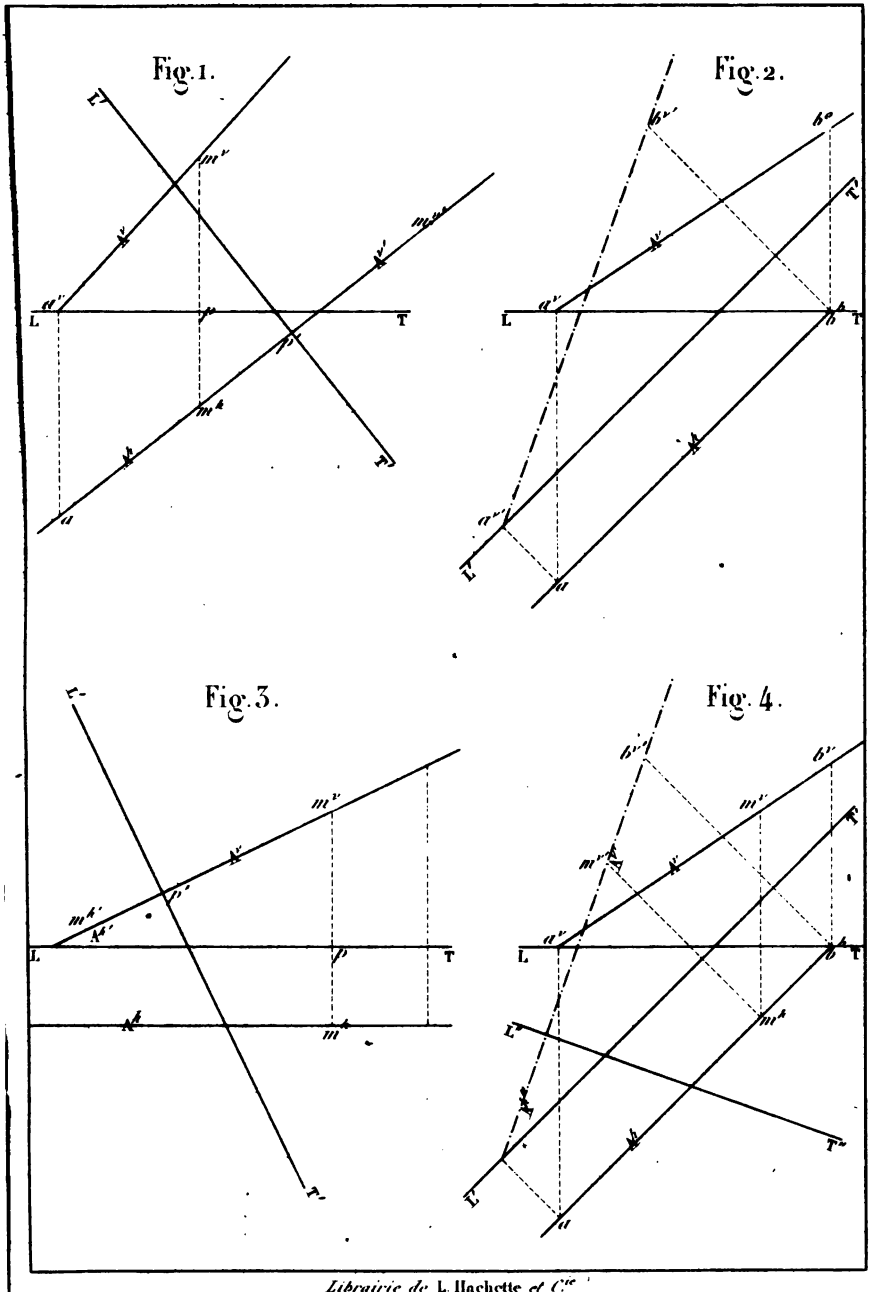
Librairie de L. Hachette et Cie.



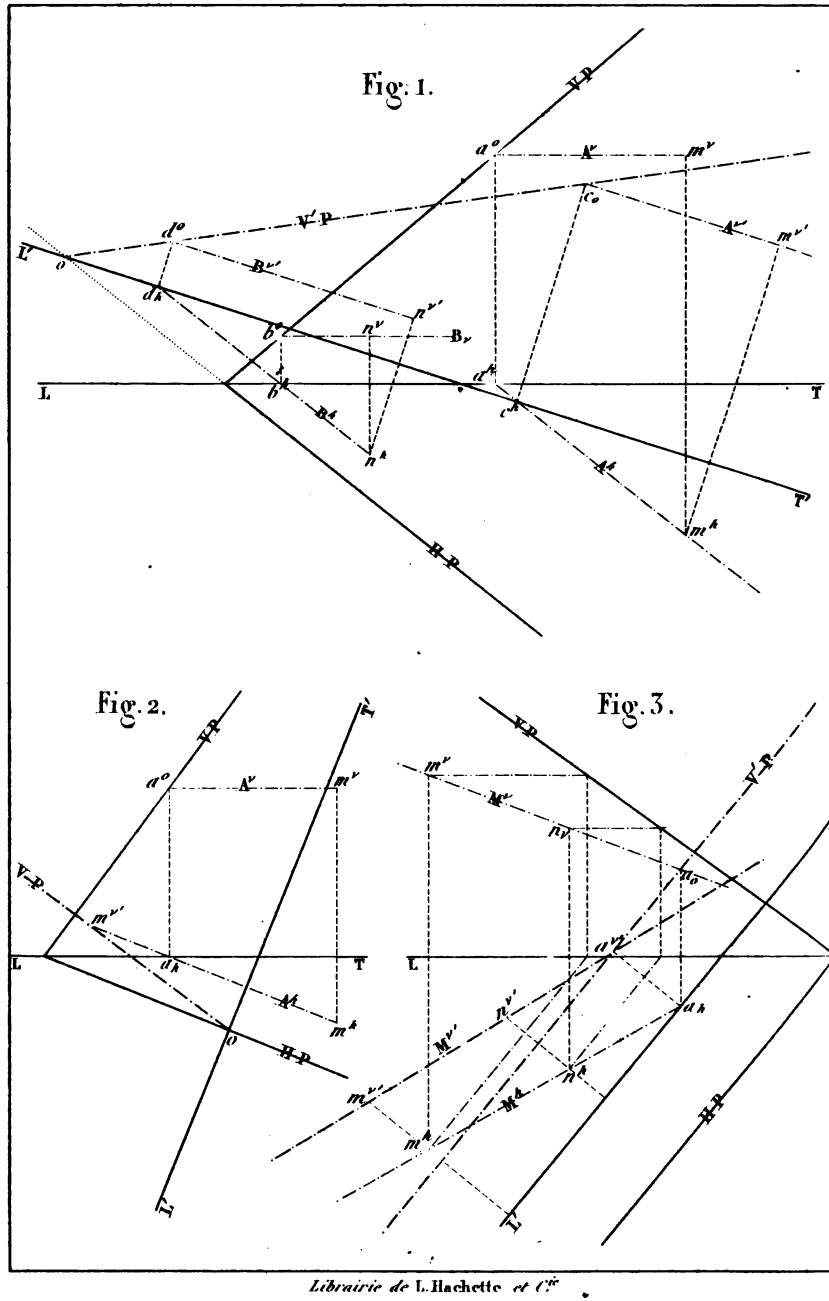
Librairie de L. Hachette et Cie



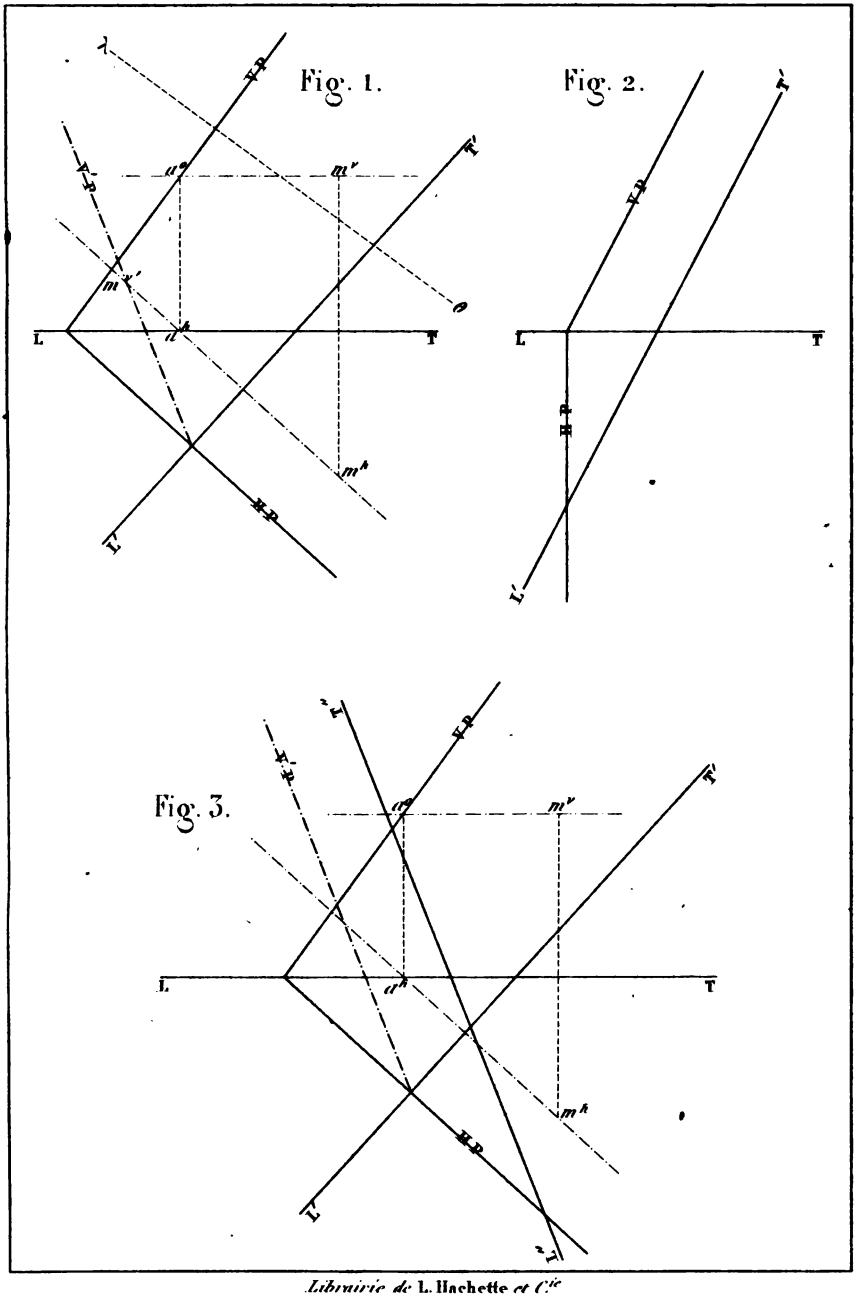
Librairie de L. Hachette et Cie



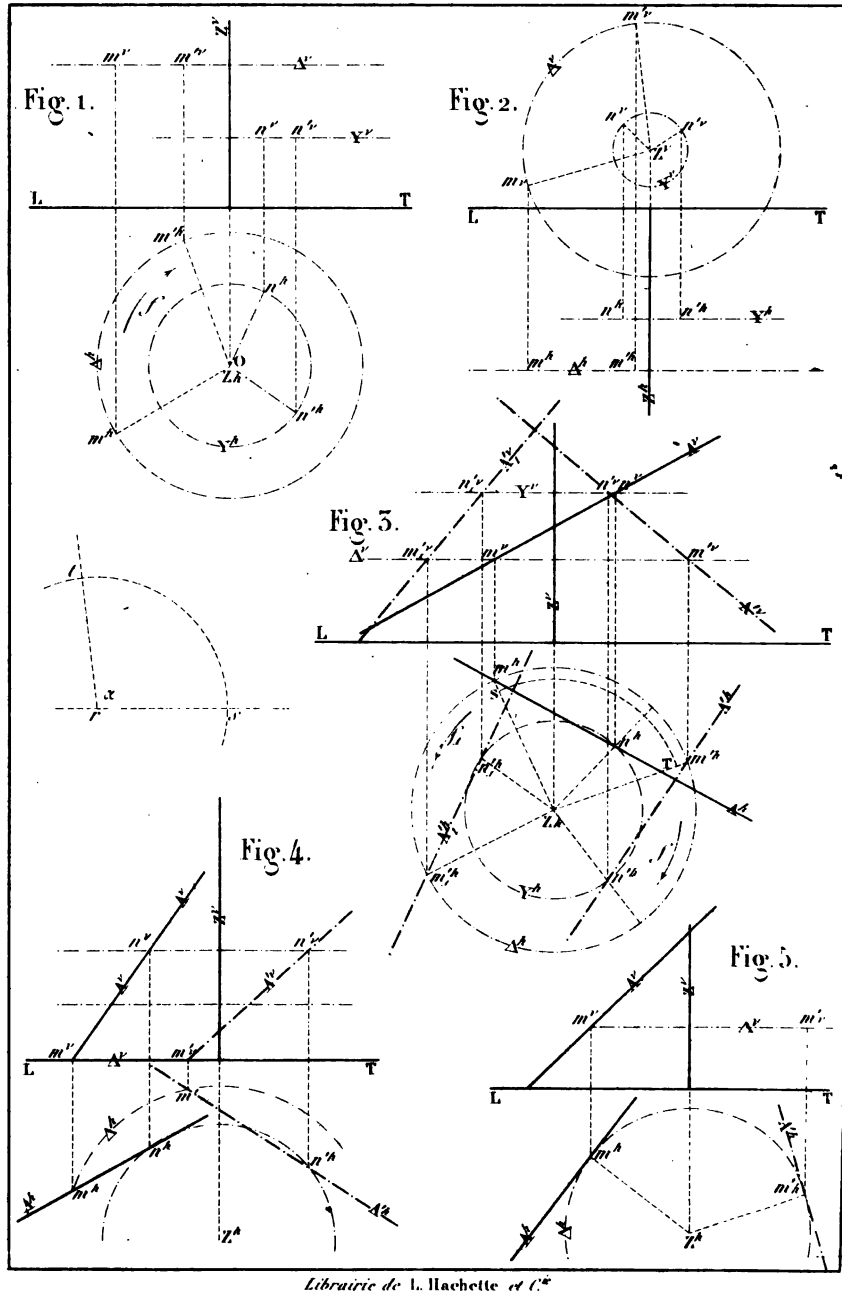
Librairie de L. Hachette *et Cie*



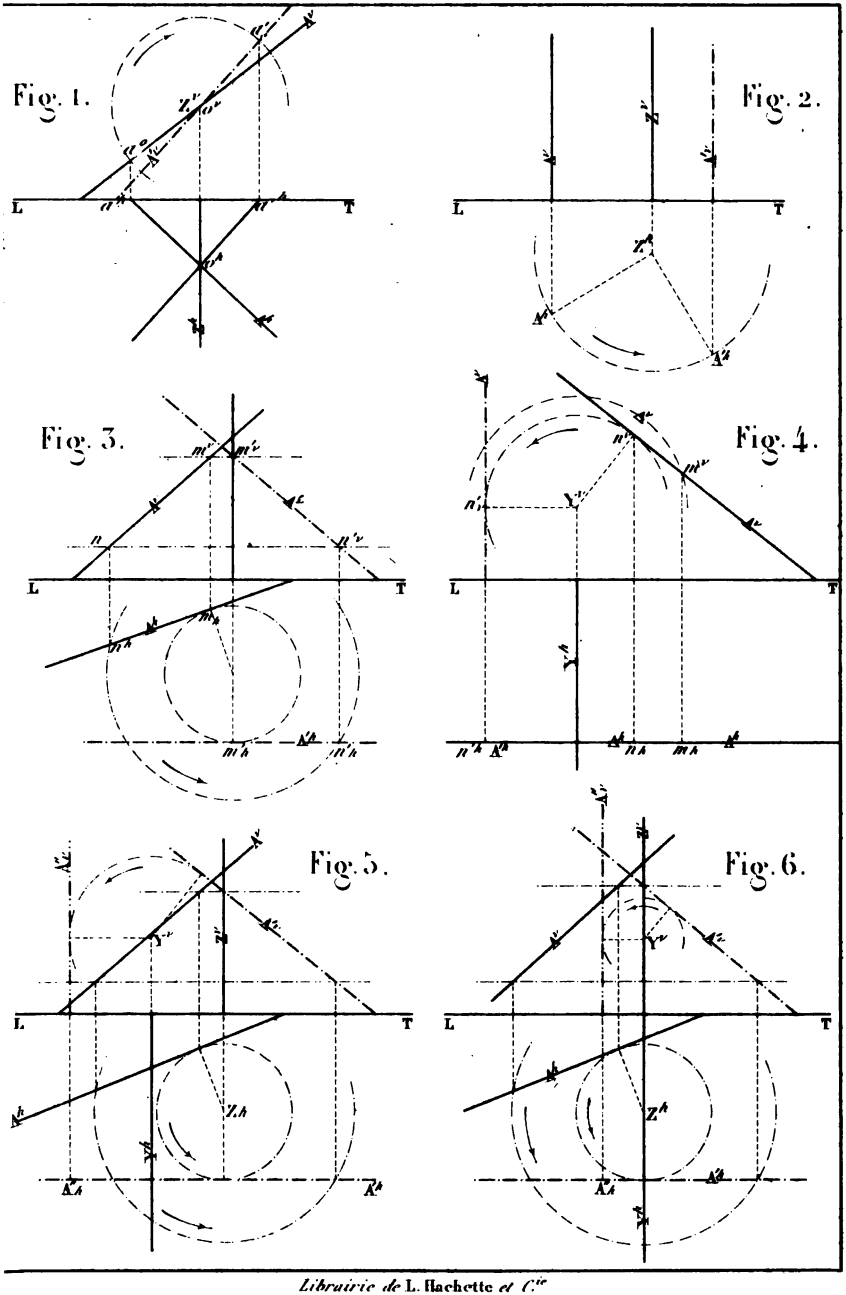
Librairie de L. Hachette et Cie



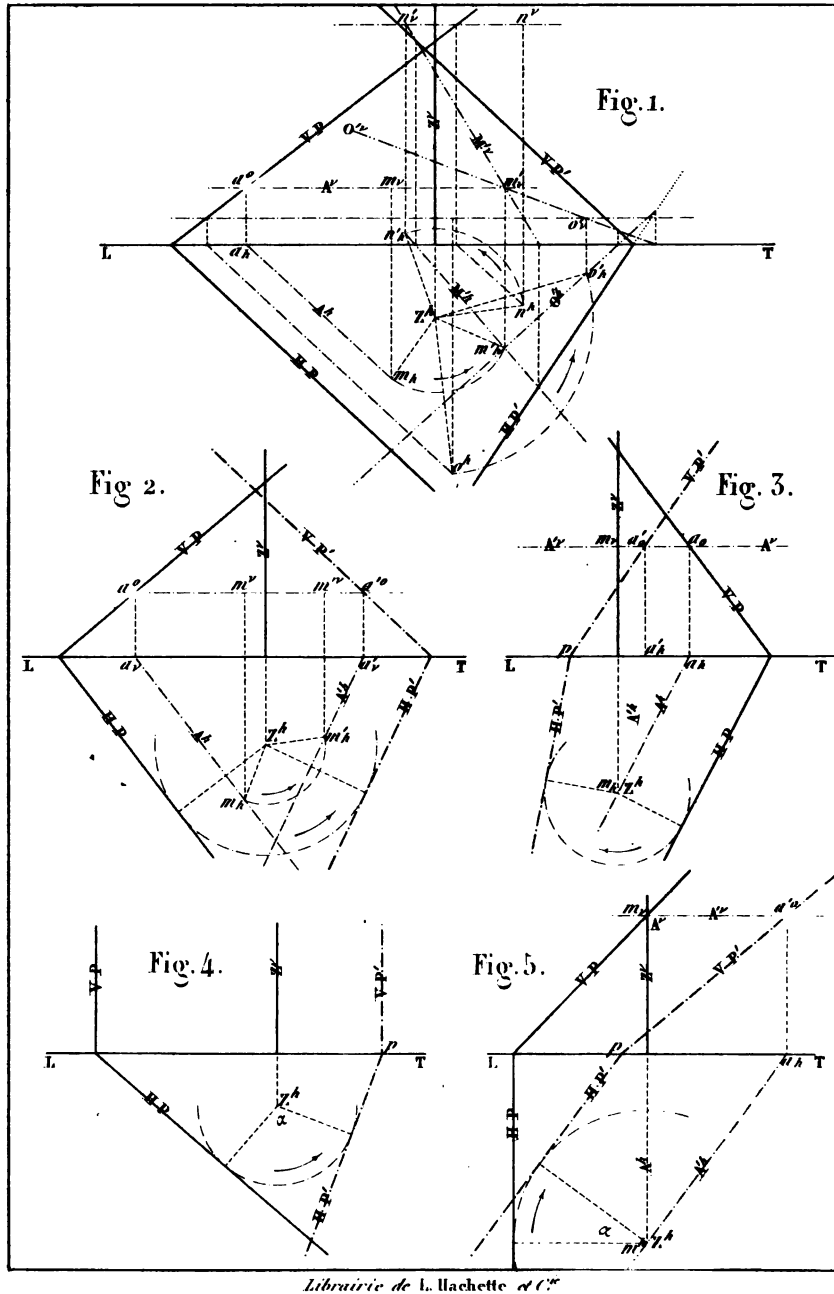
Librairie de L. Hachette et Cie



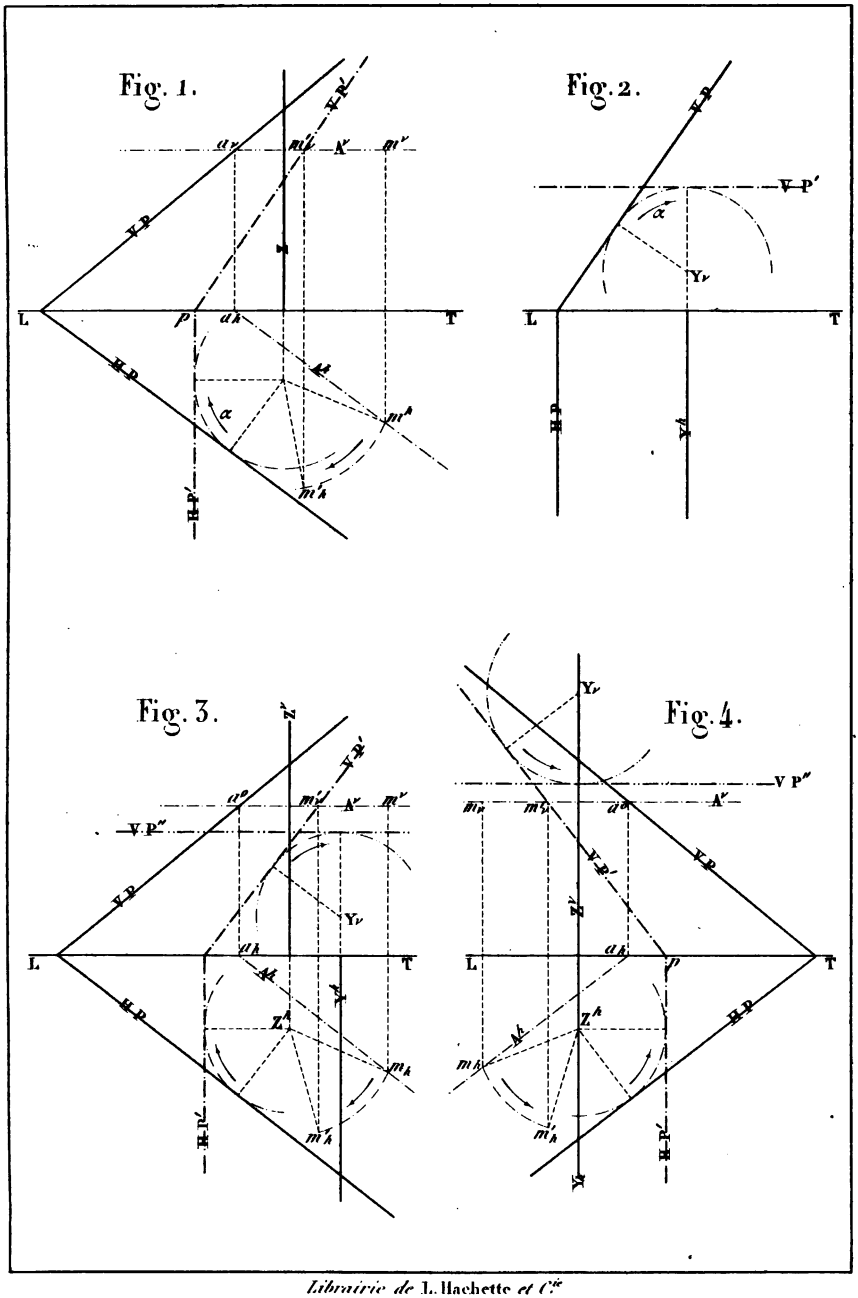
Librairie de L. Hachette *et C.ie*



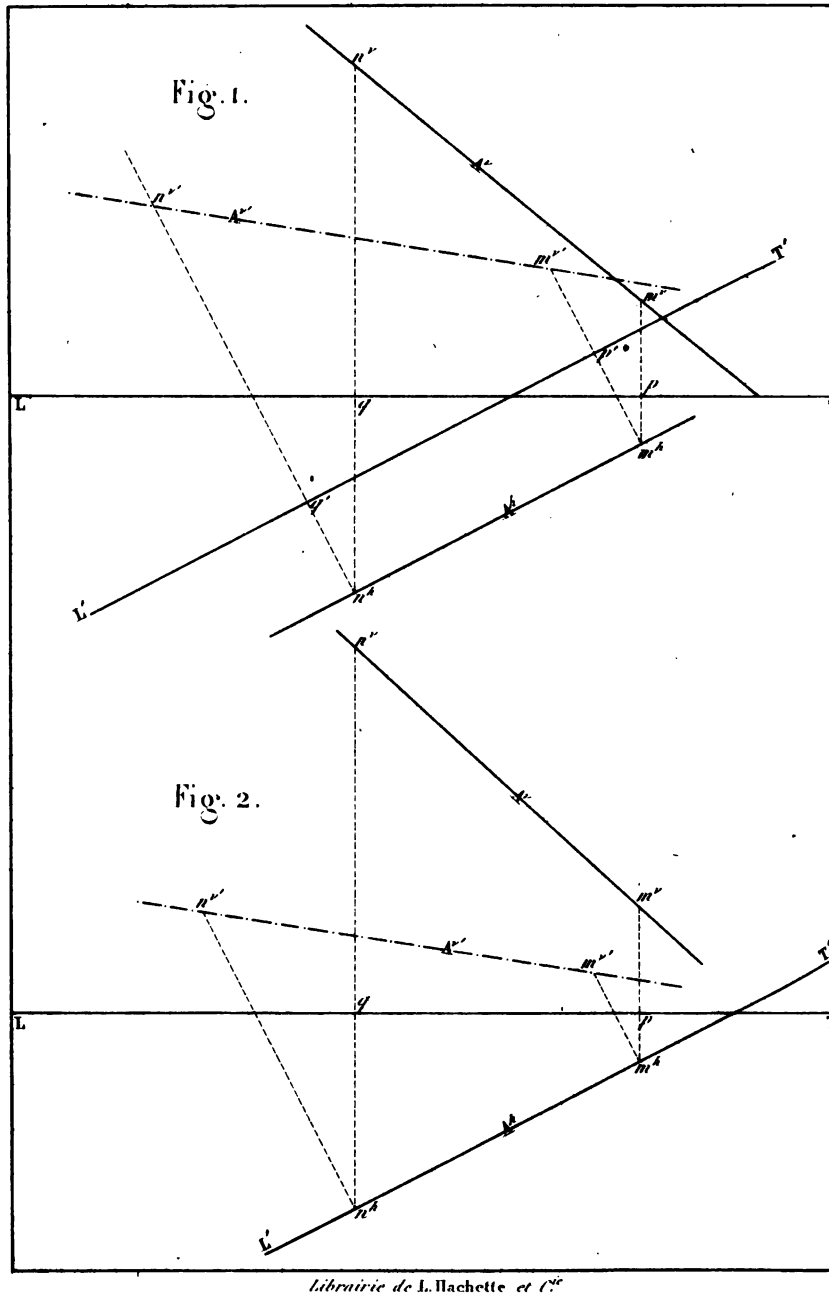
Librairie de L. Hachette *et Cie*



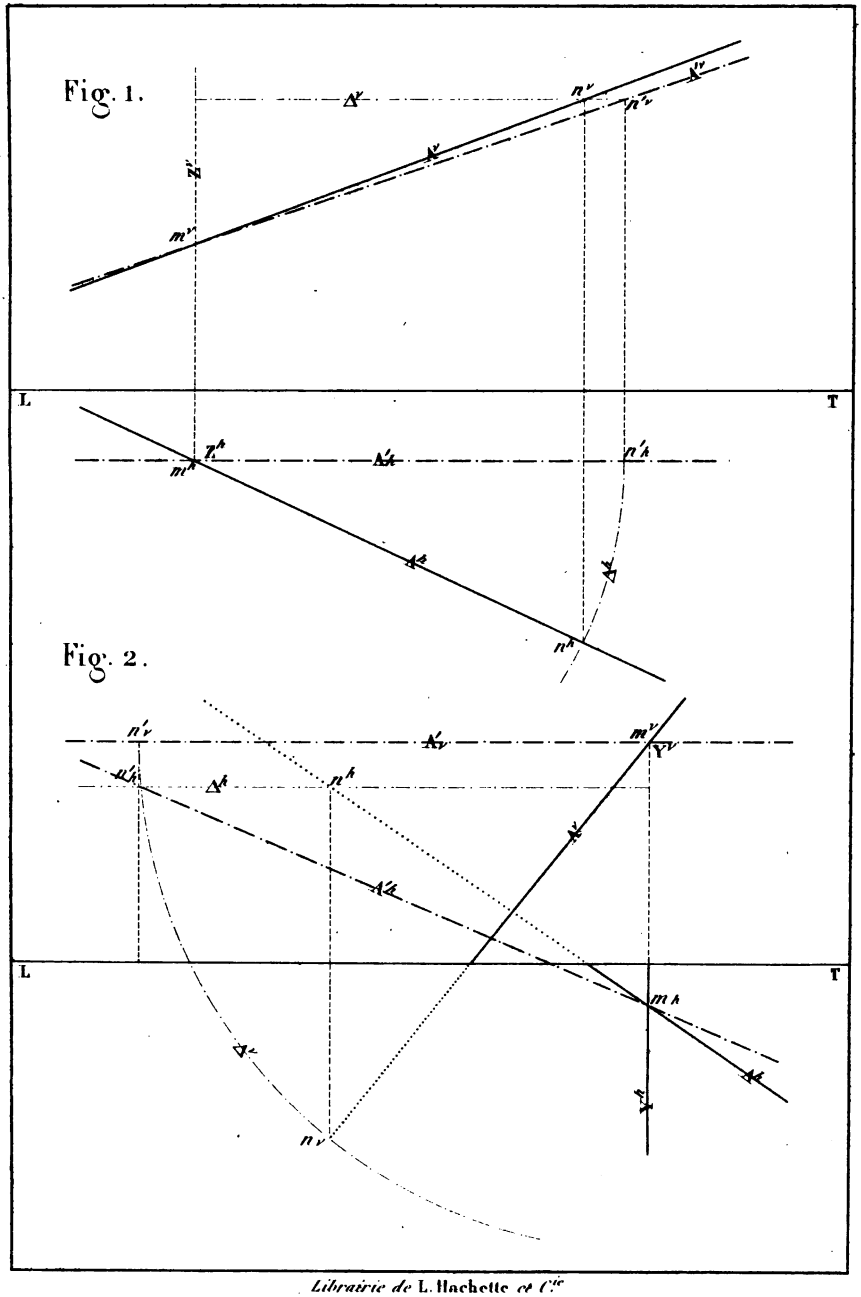
Librairie de L. Hachette et Cie



Librairie de L. Hachette *et Cie*



Librairie de L. Hachette et Cie



Librairie de L. Hachette et Cie

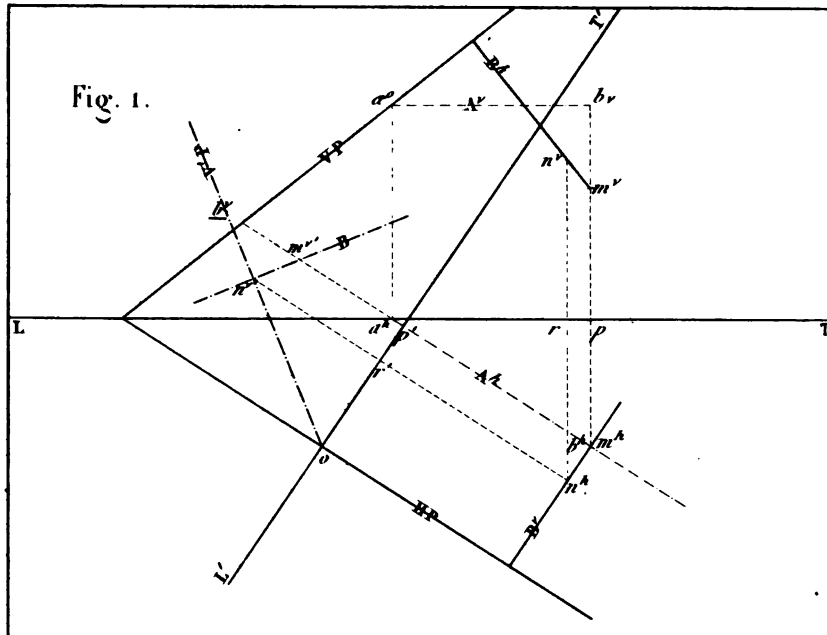


Fig. 1.
L
T
L'
VP
HP
A
B

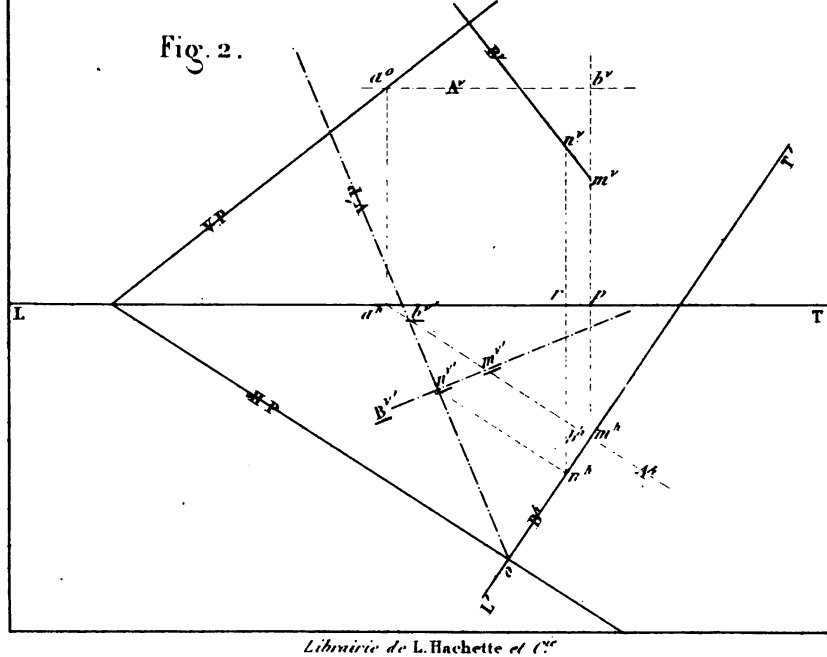
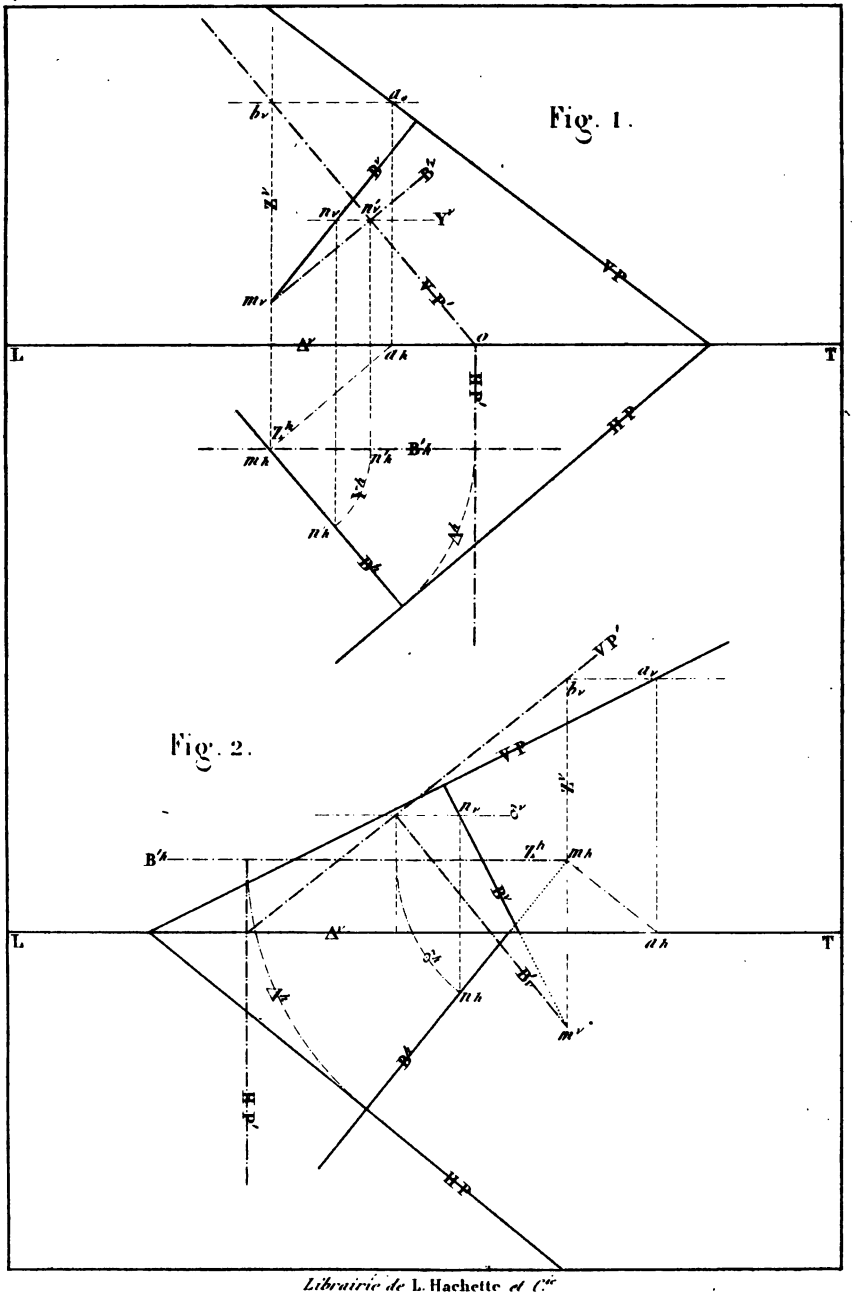
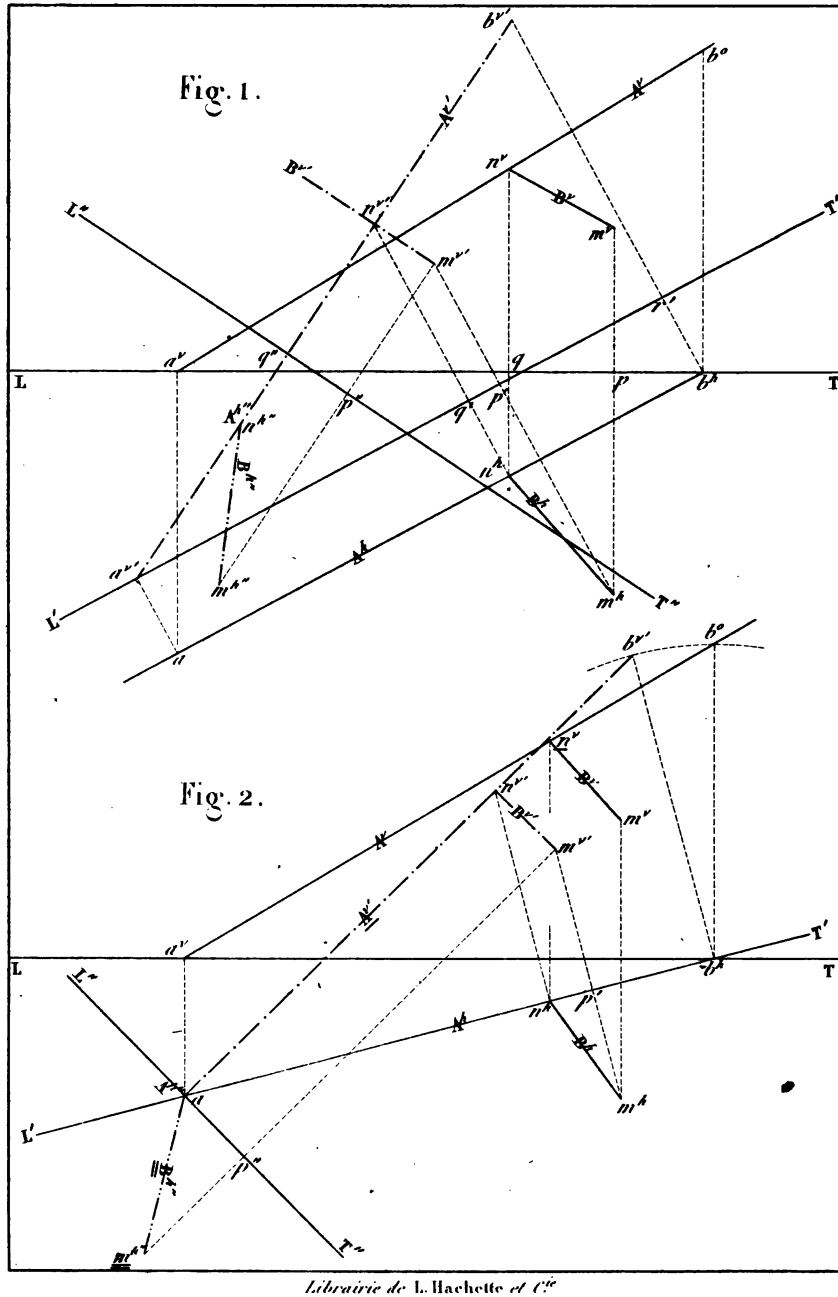


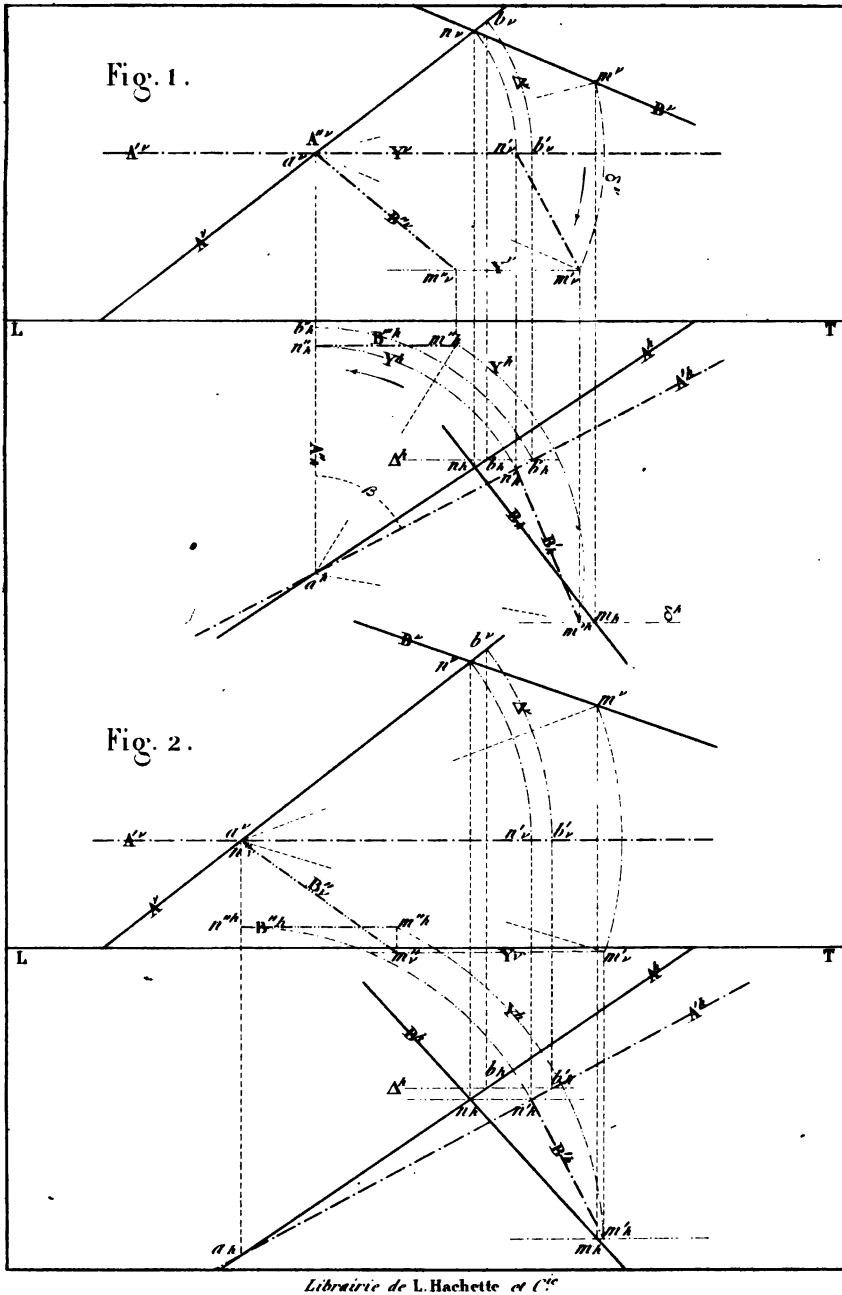
Fig. 2.
L
T
L'
VP
HP
A
B



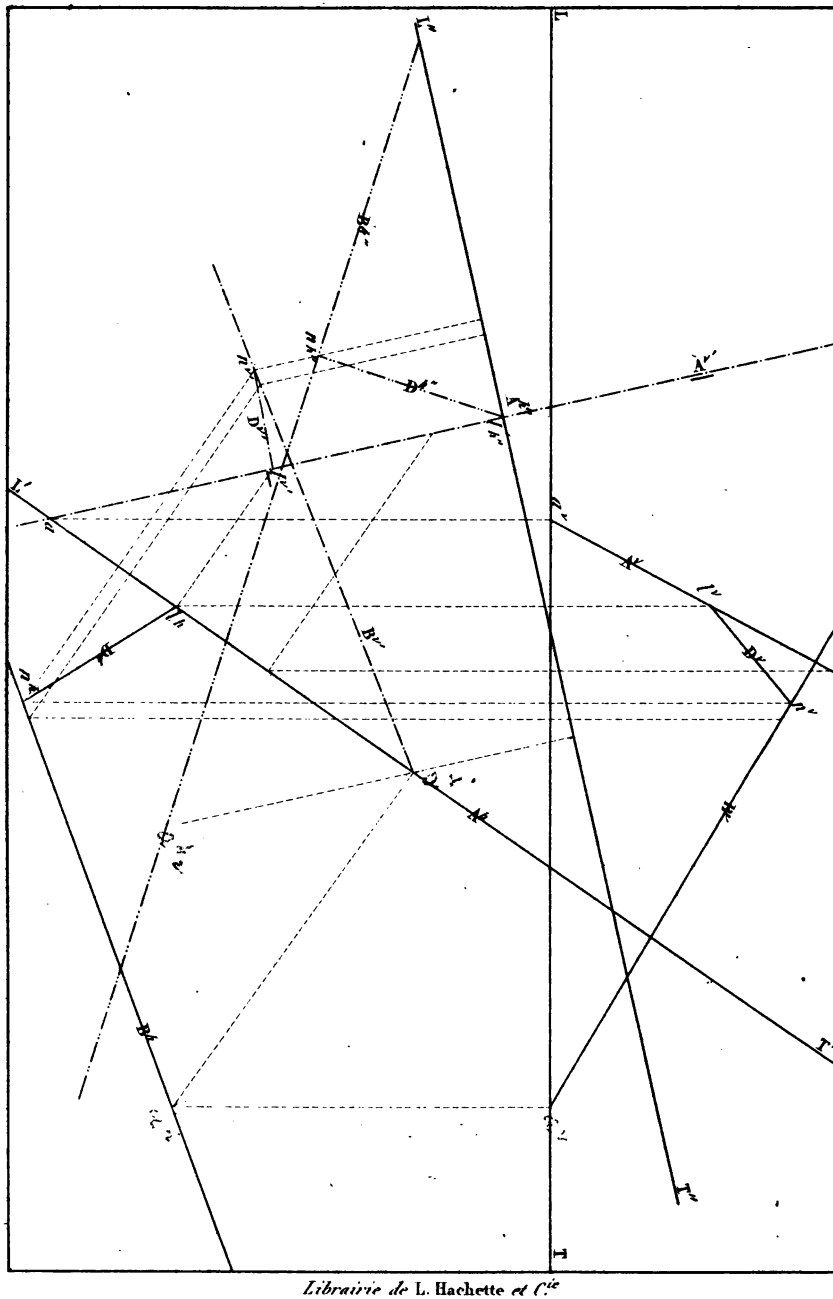
Librairie de L. Hachette *et Cie*



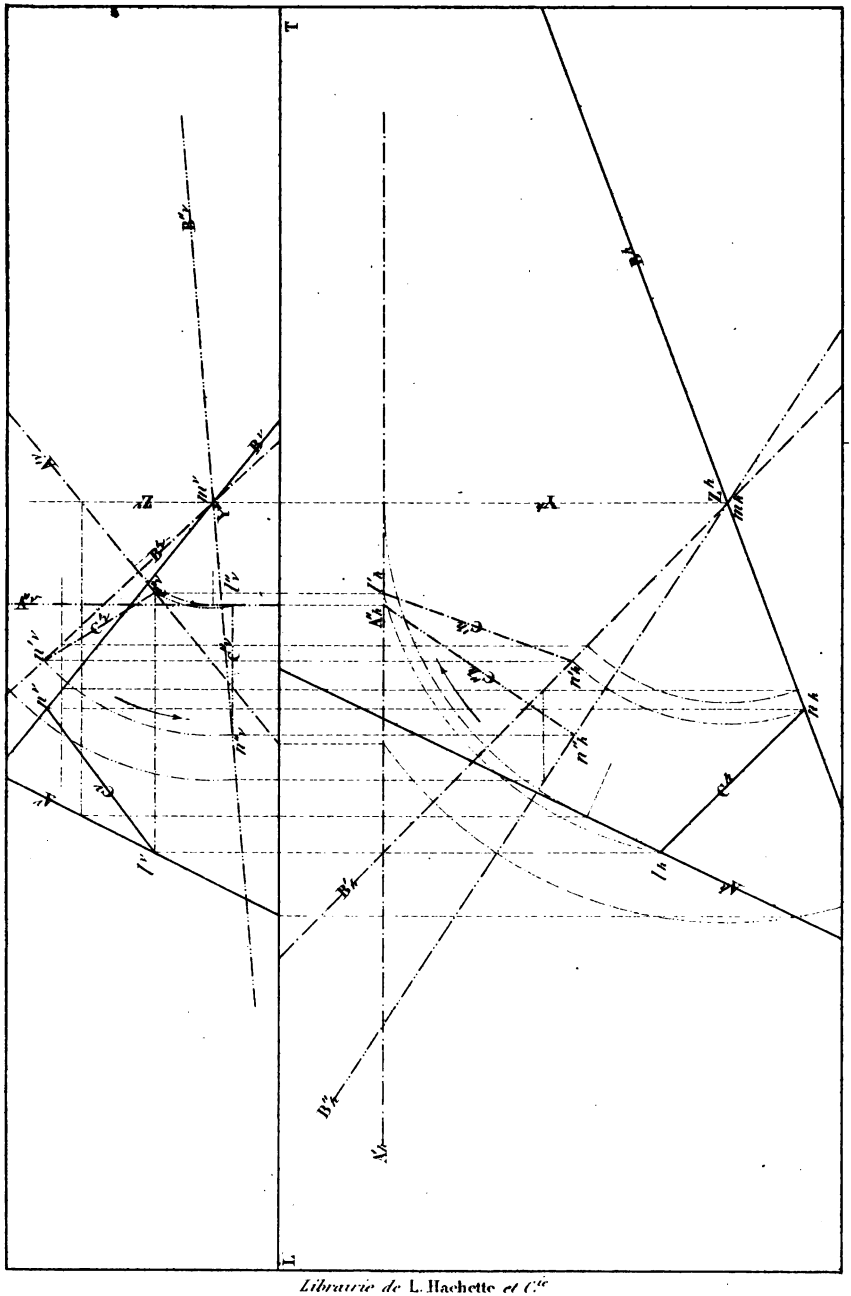
Librairie de L. Hachette *et Cie*



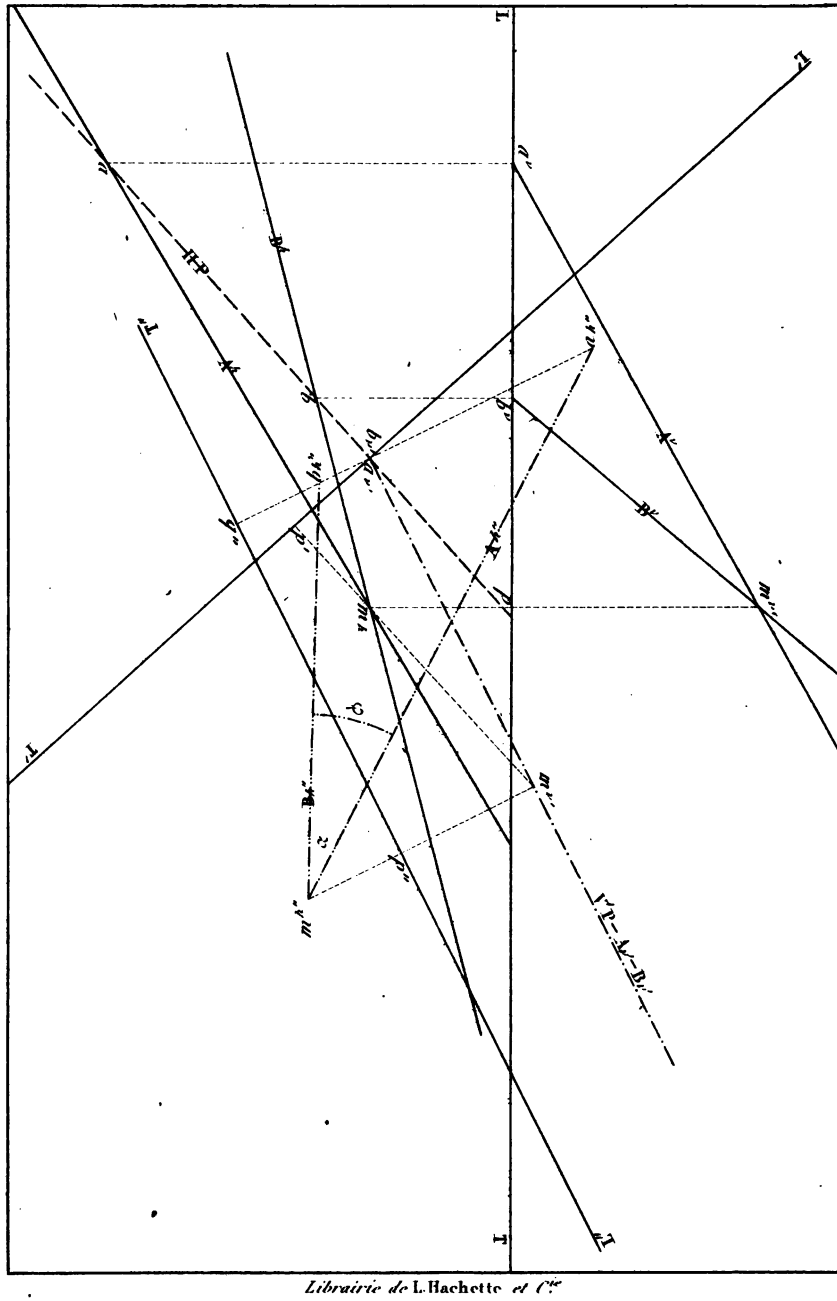
Librairie de L. Hachette *et Cie*



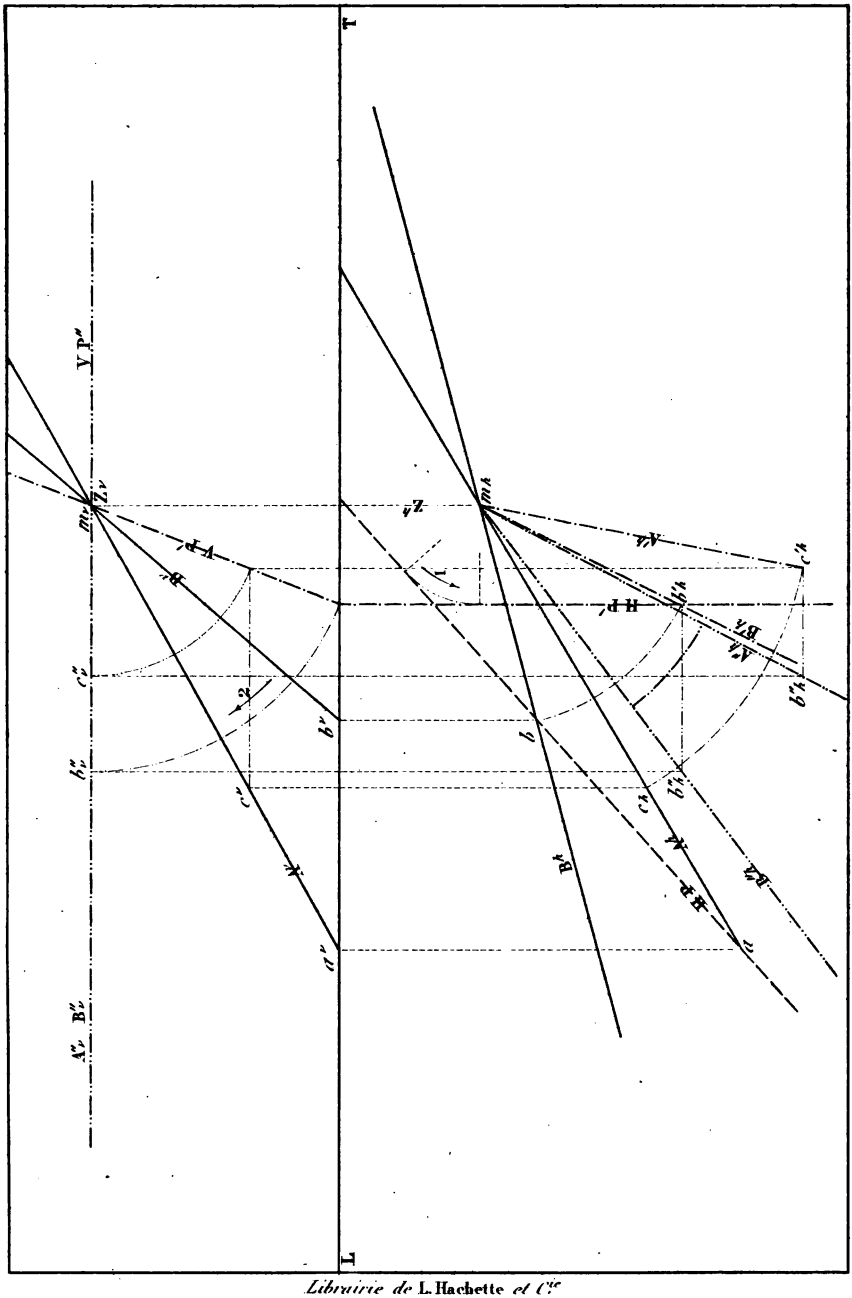
Librairie de L. Hachette *et Cie*



Librairie de L. Hachette *et Cie*

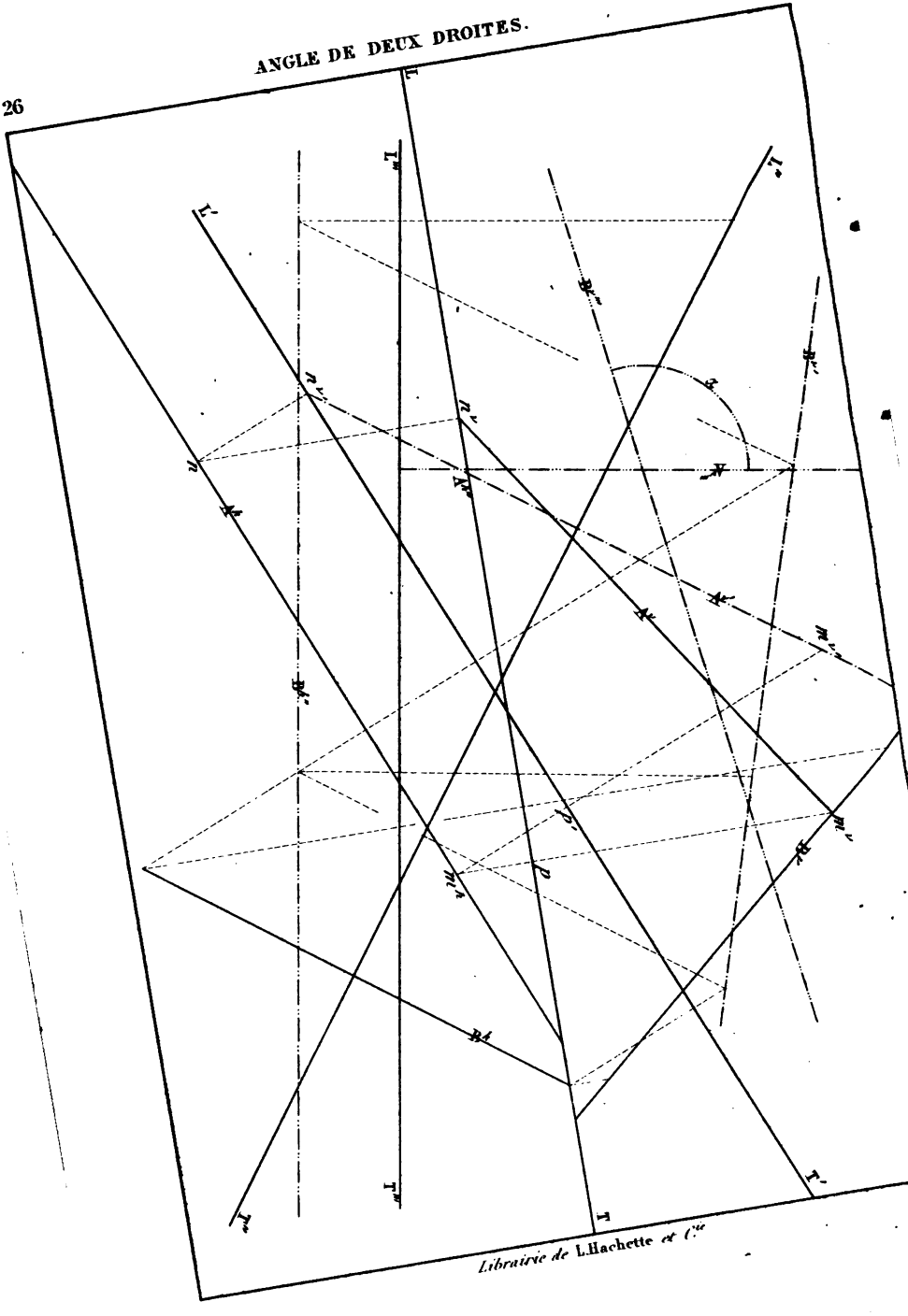


Librairie de L. Hachette *et Cie*

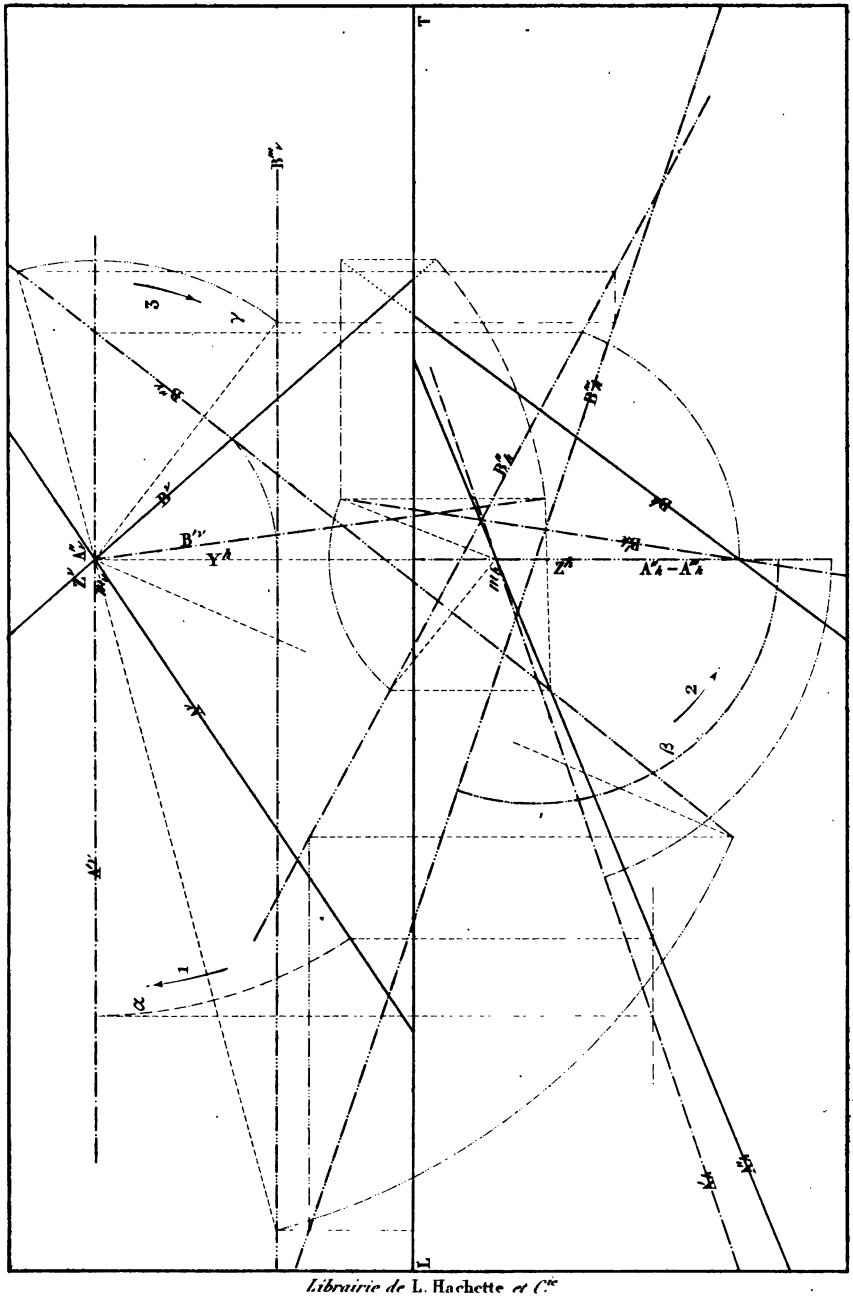


Librairie de L. Hachette *et Cie*

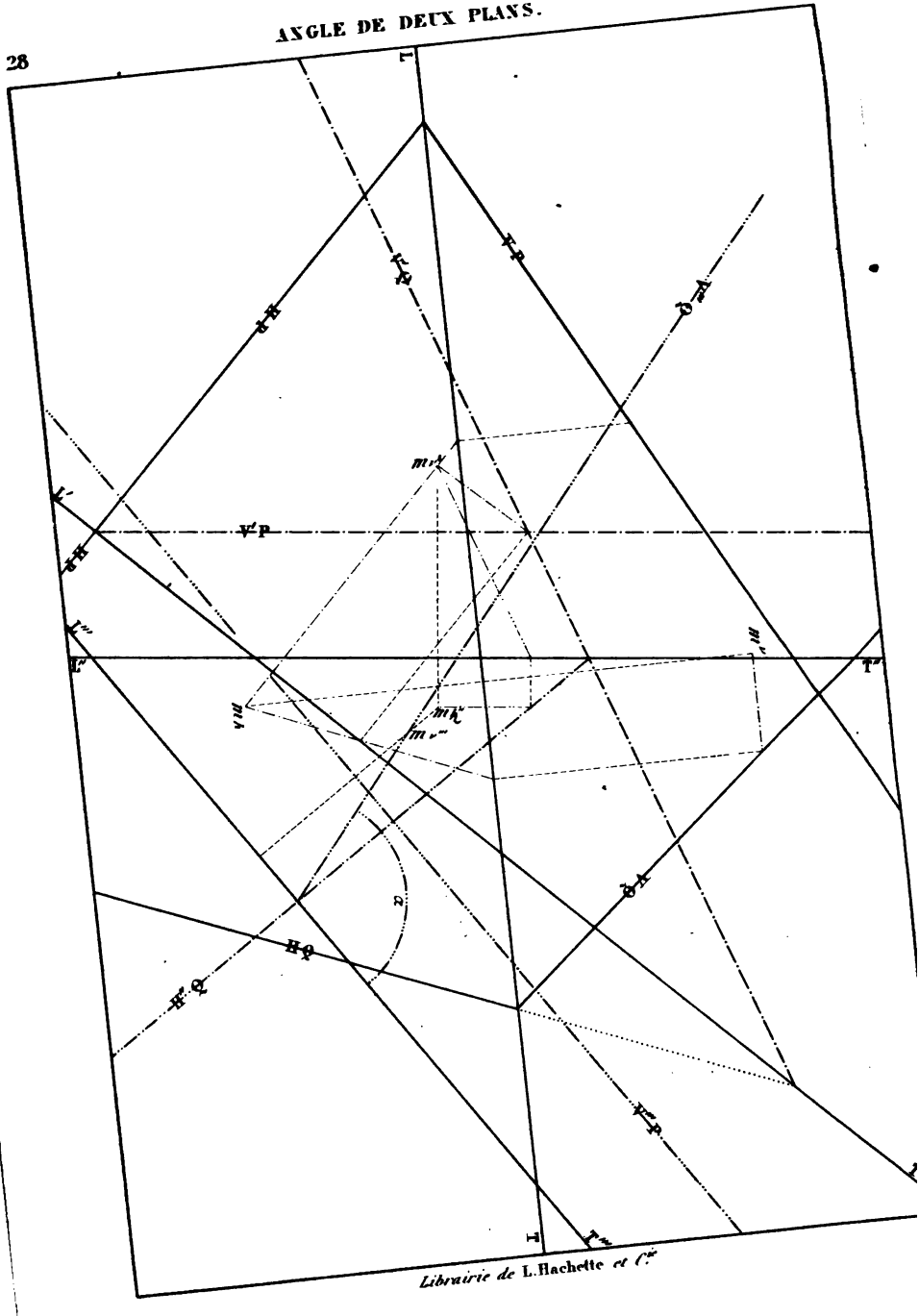
ANGLE DE DEUX DROITES.



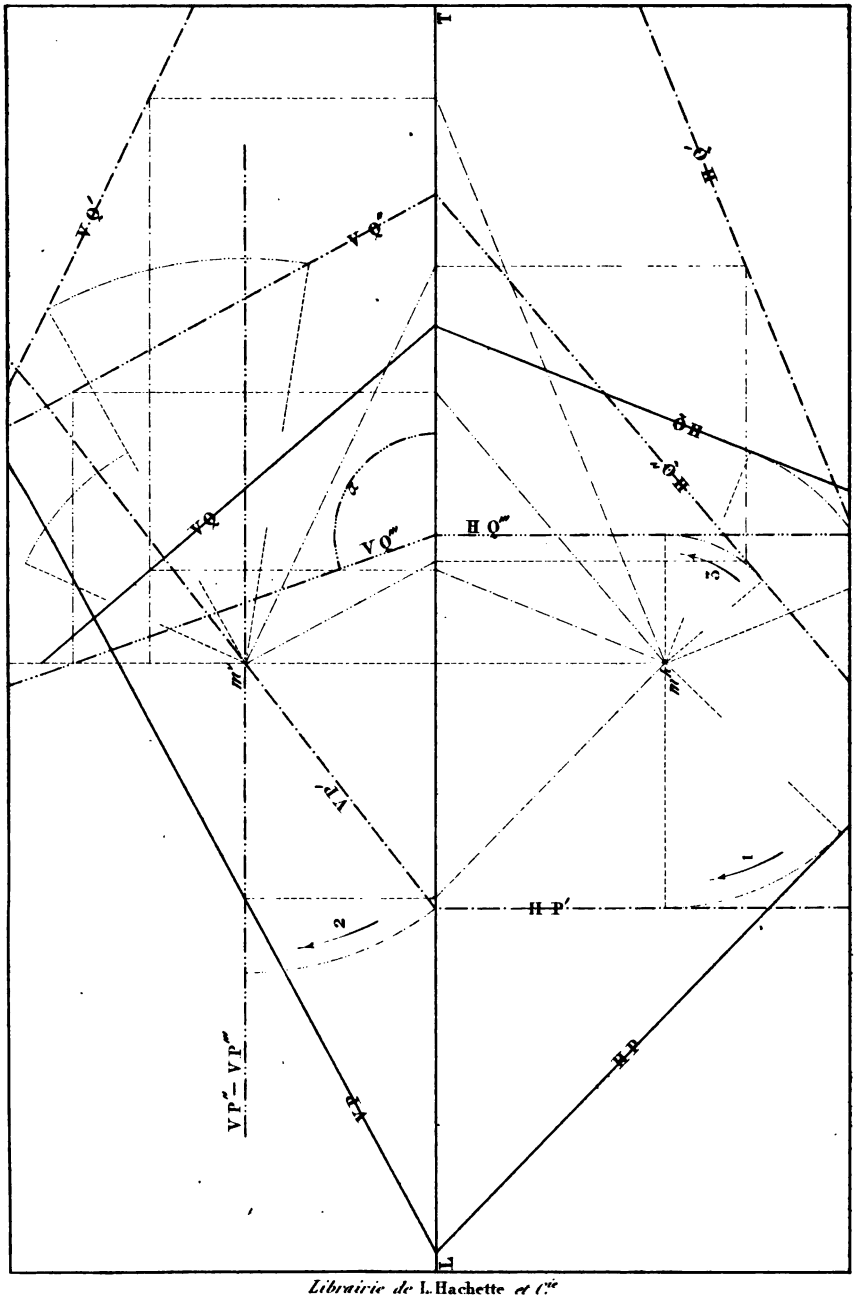
Librairie de L. Hachette et Cie


T
L
3
γ
2
β
1
α
B'''
Y'''
Z'''
A'''
B''
B'
B''
B'
B''
B'
B''
B'
Y'
Z'
A'
Y'
Z'
A'
Y'
Z'
A

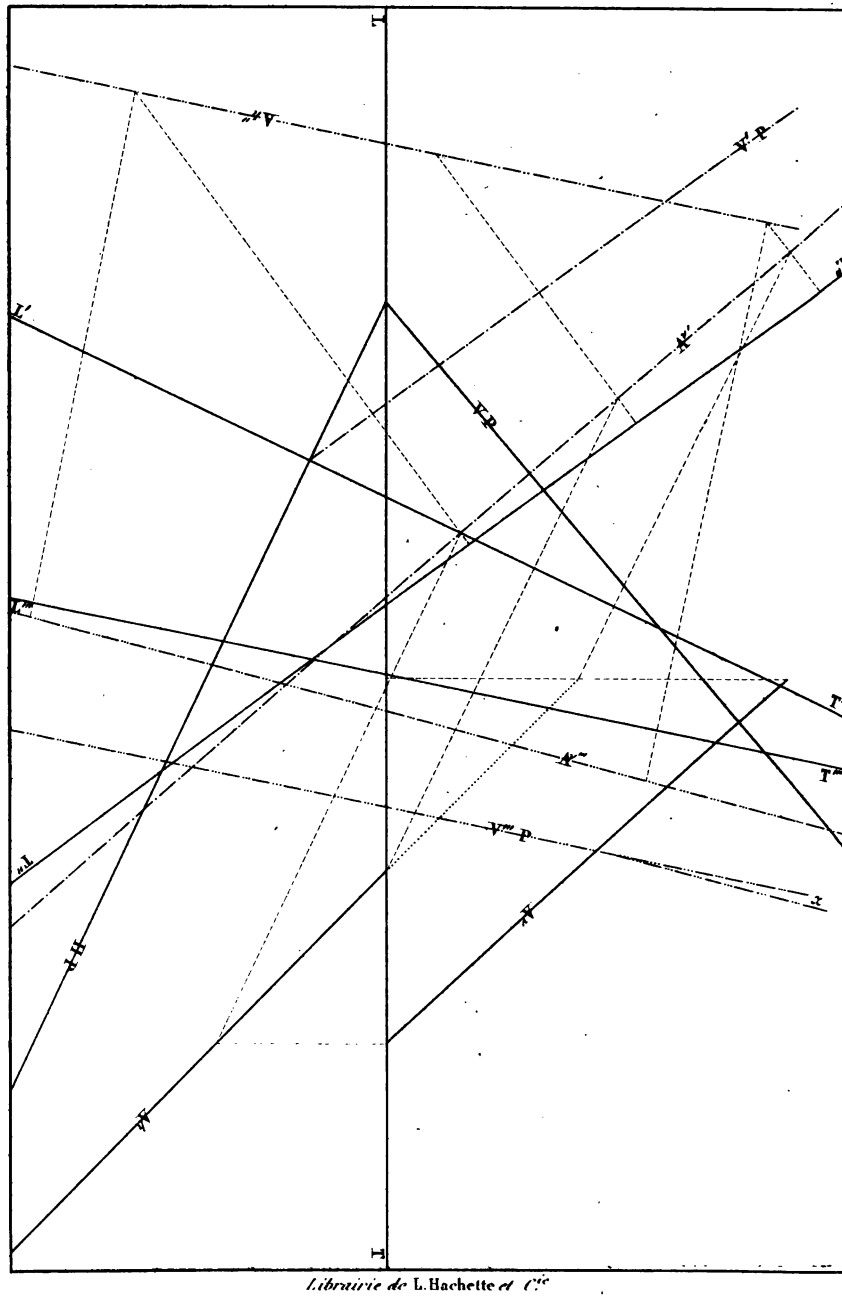
ANGLE DE DEUX PLANS.



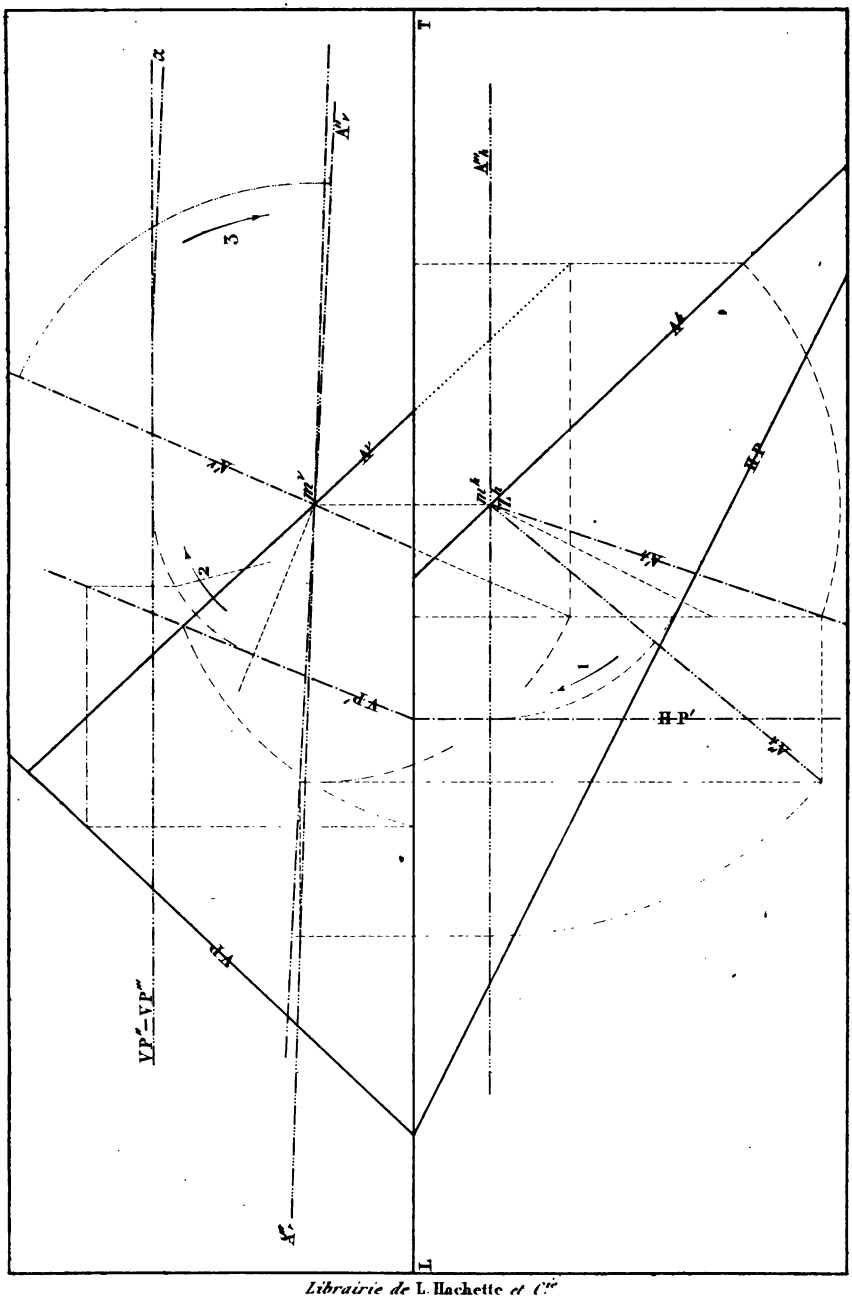
Librairie de L. Hachette *et* Cie



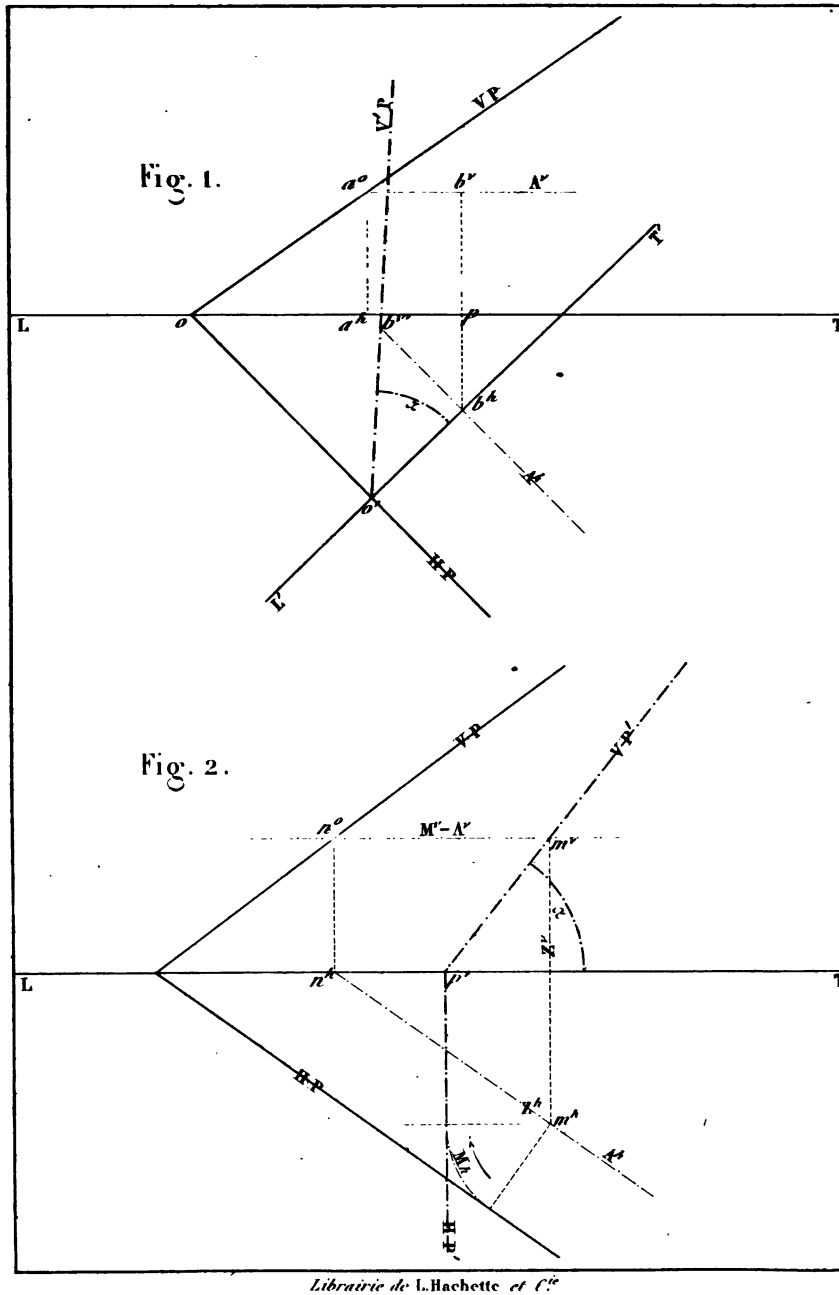
Librairie de L. Hachette *et Cie*



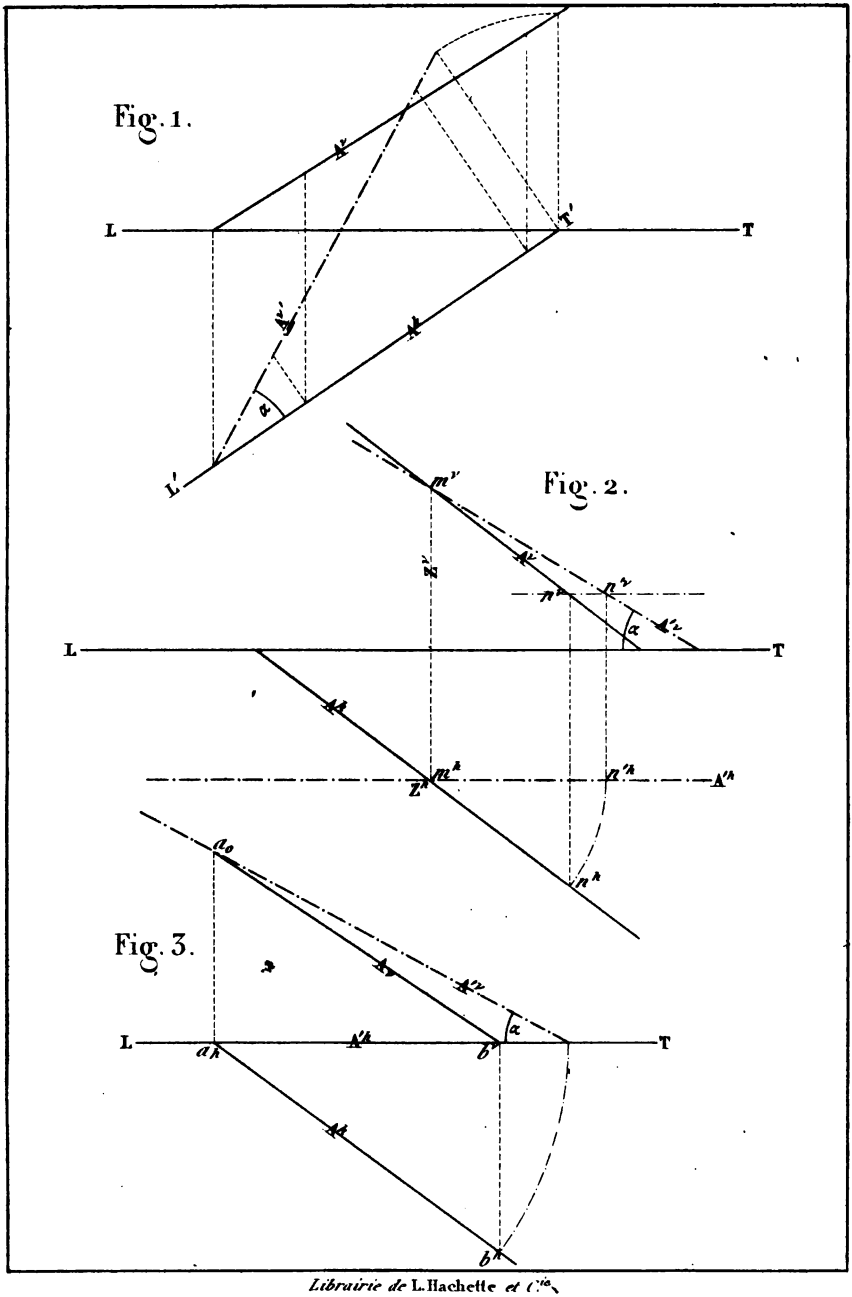
Librairie de L. Hachette et Cie



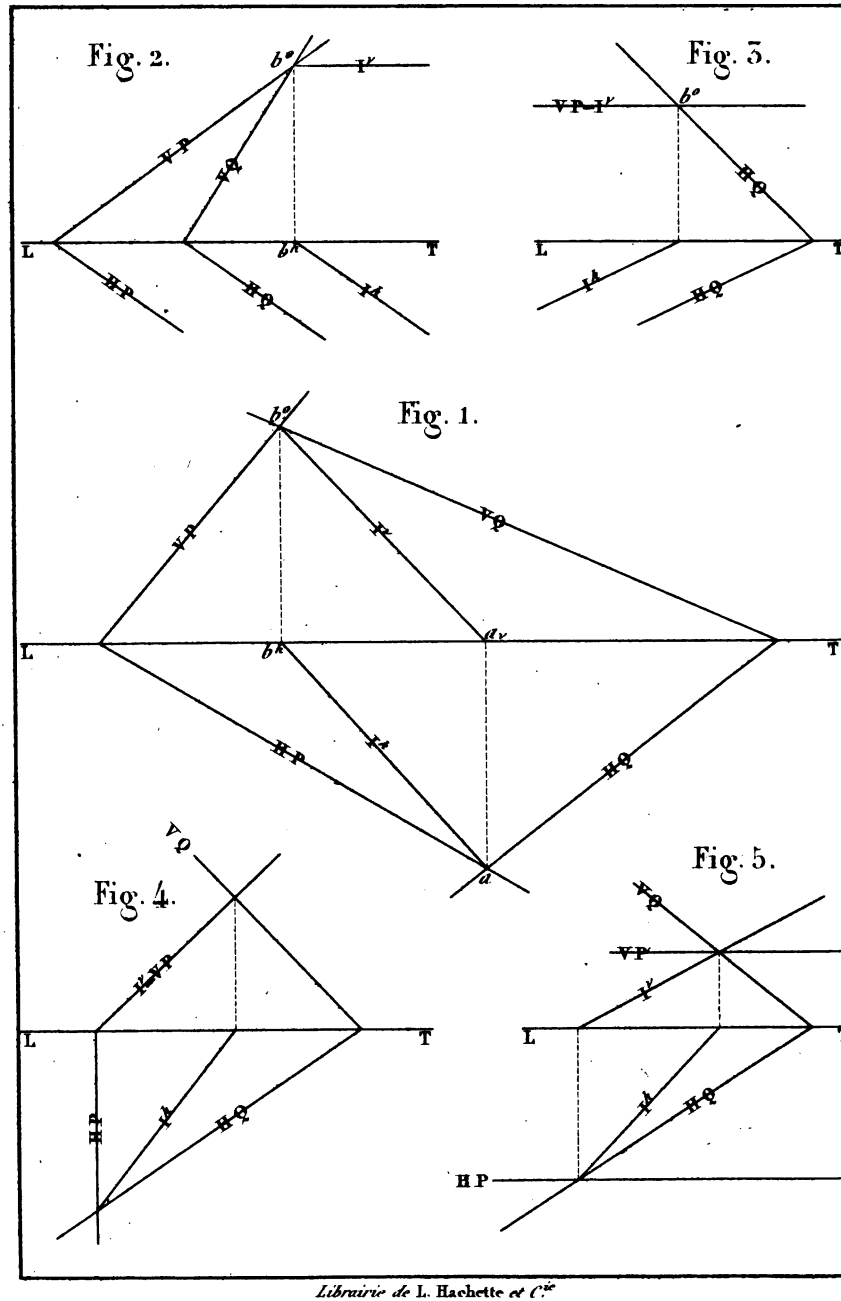
Librairie de L. Hachette *et Cie*



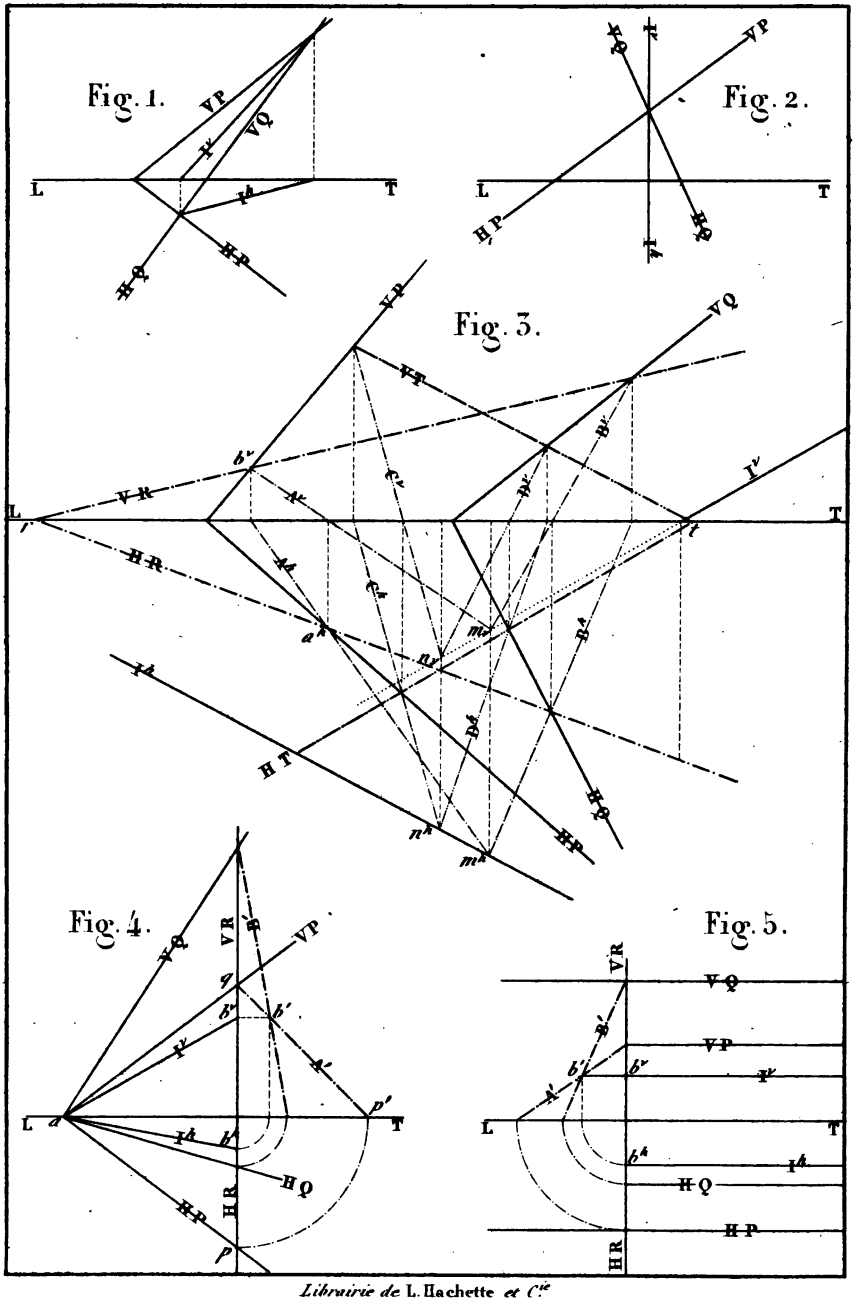
Librairie de L. Hachette et Cie



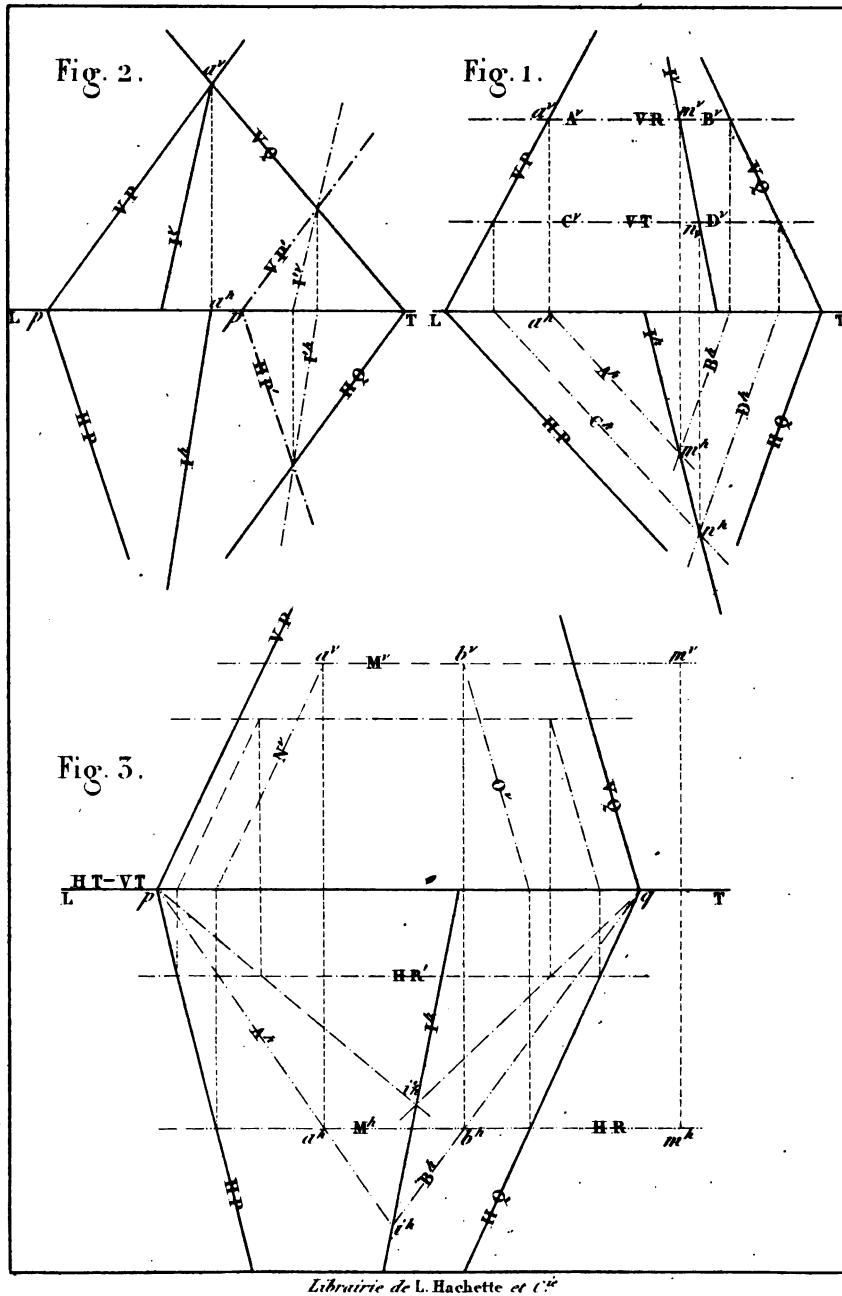
Librairie de L. Hachette *et Cie.*



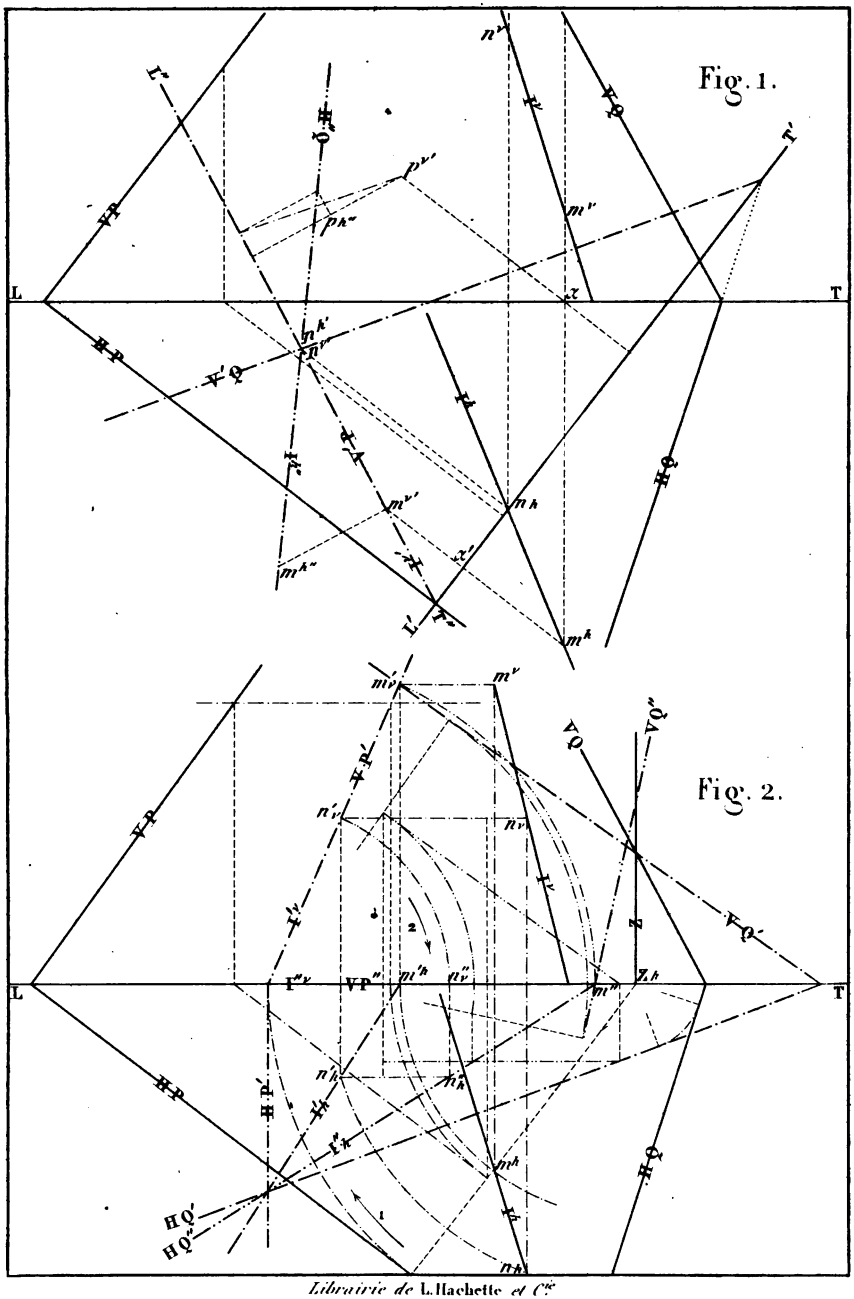
Librairie de L. Hachette *et Cie*



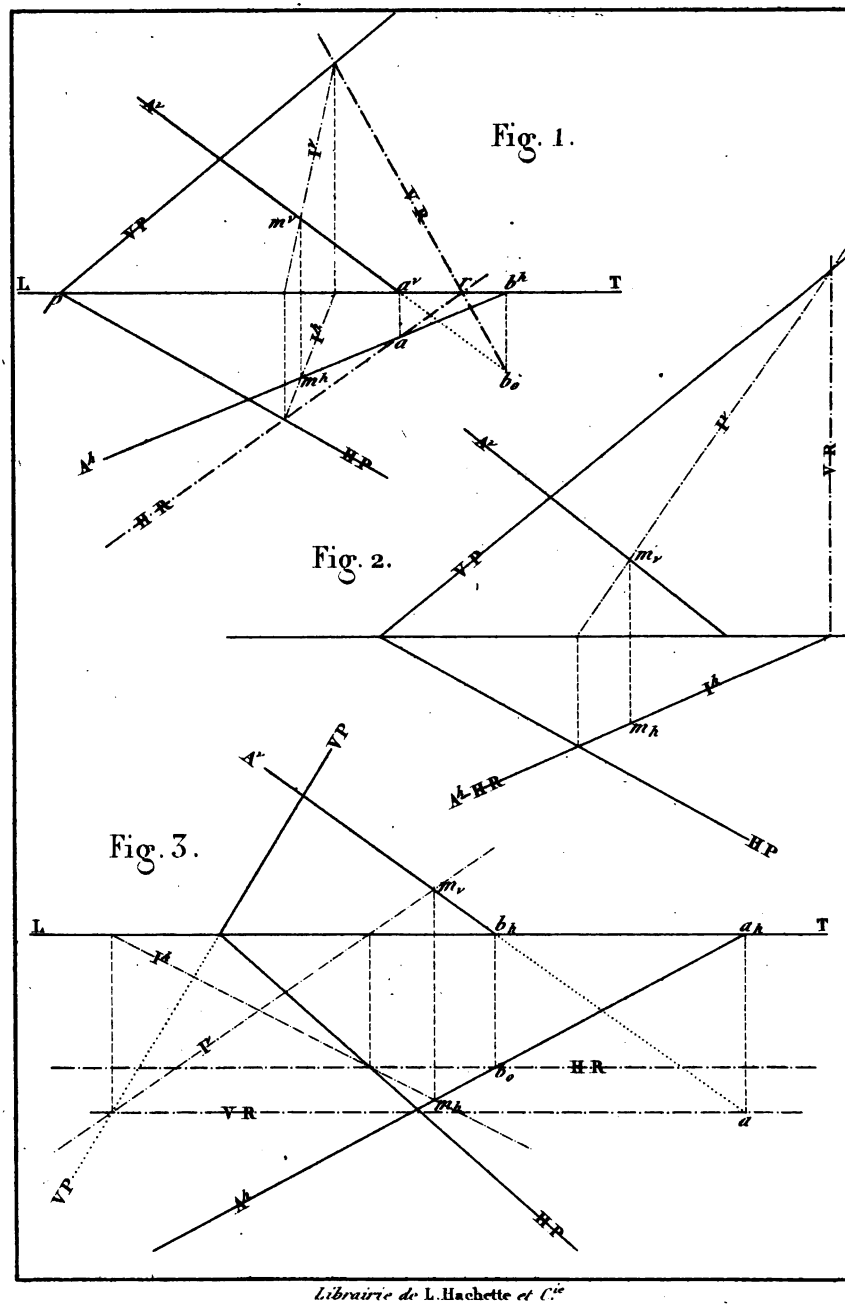
Librairie de L. Hachette *et Cie*



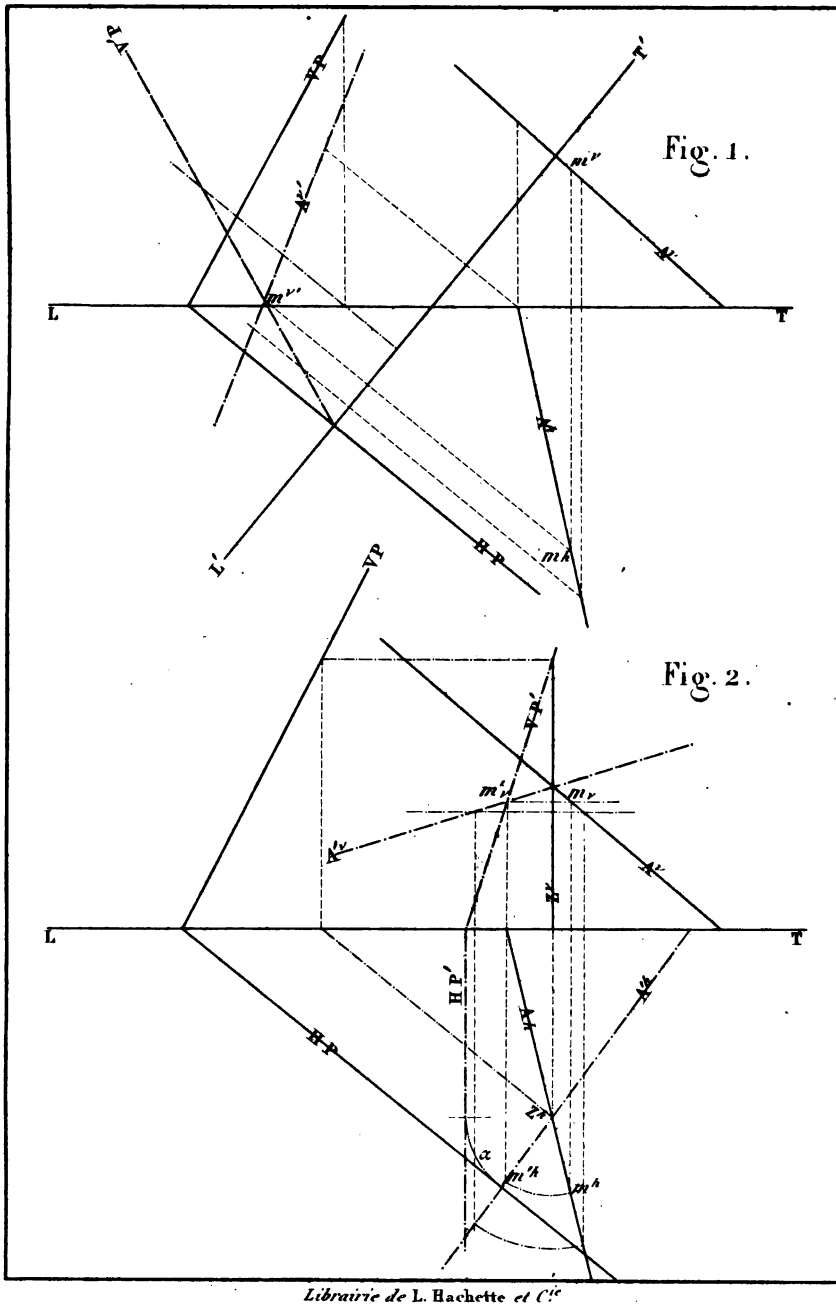
Librairie de L. Hachette *et Cie*



Librairie de L. Hachette et Cie

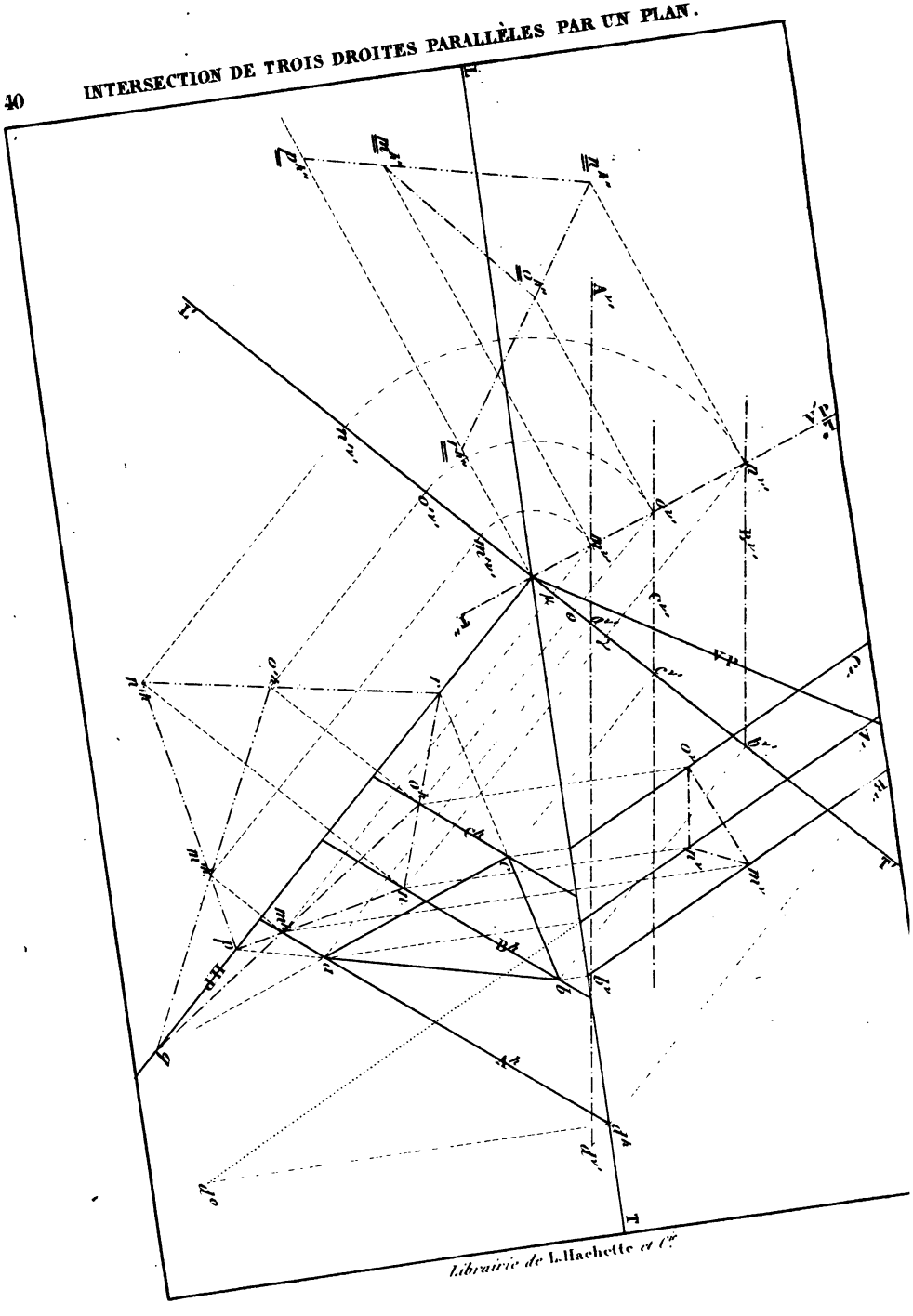


Librairie de L. Hachette et Cie

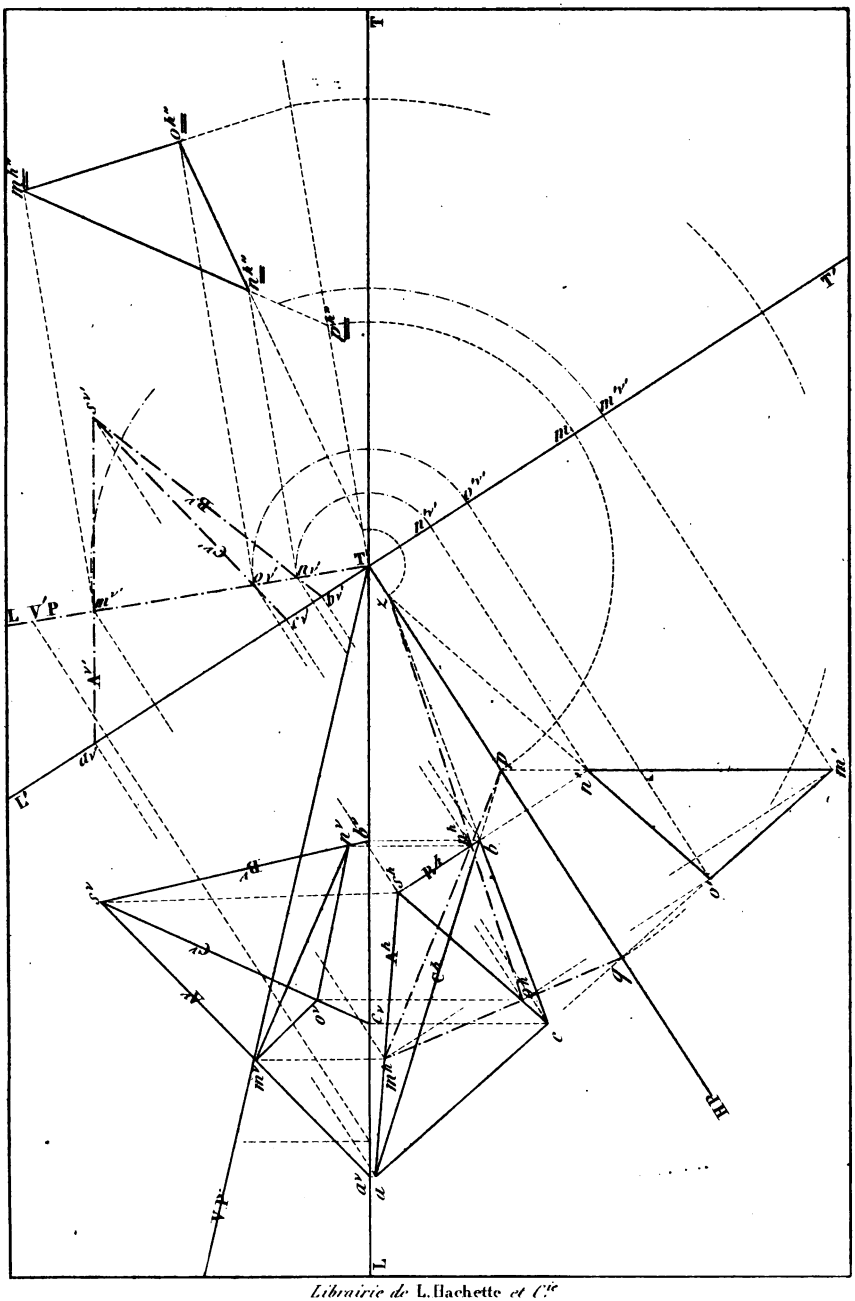


Librairie de L. Hachette *et Cie*

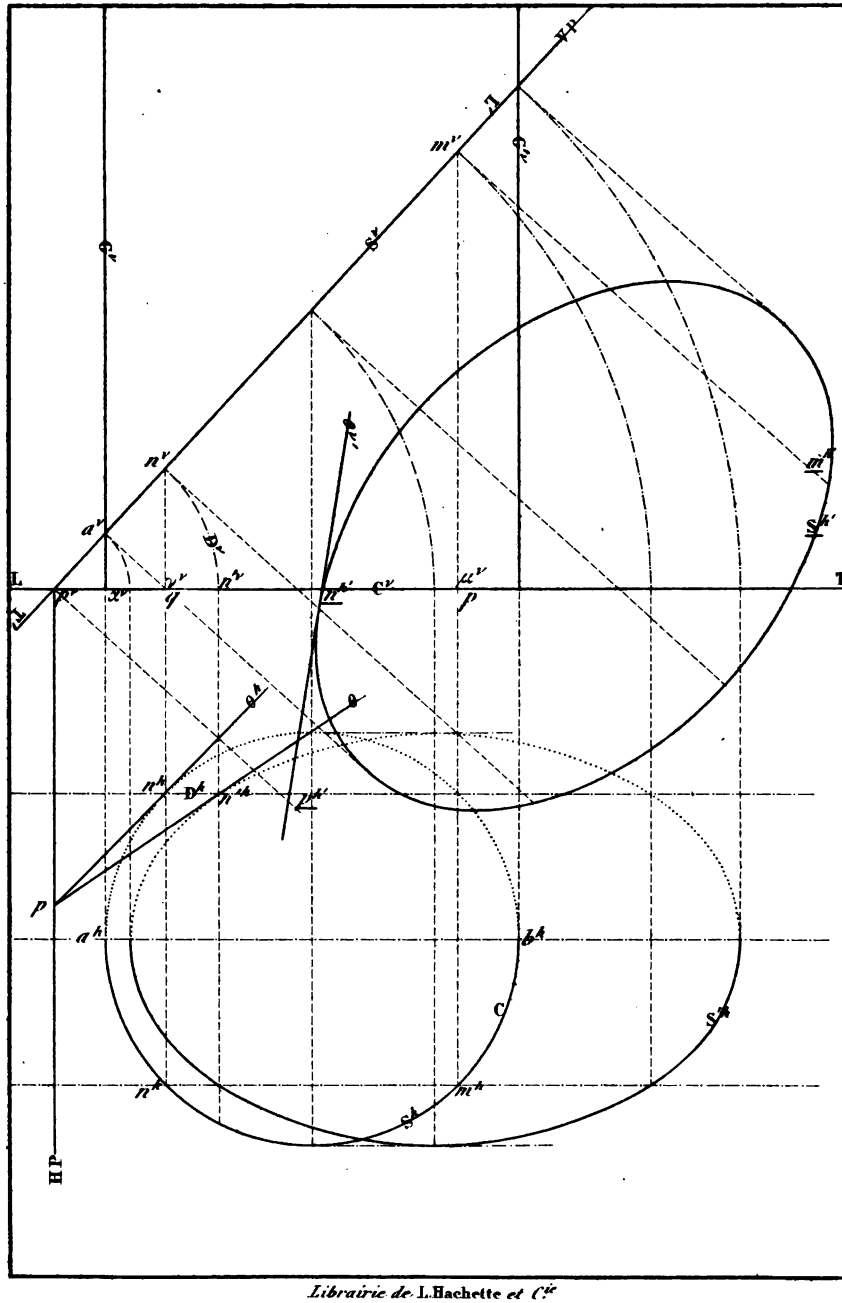
INTERSECTION DE TROIS DROITES PARALLÈLES PAR UN PLAN.



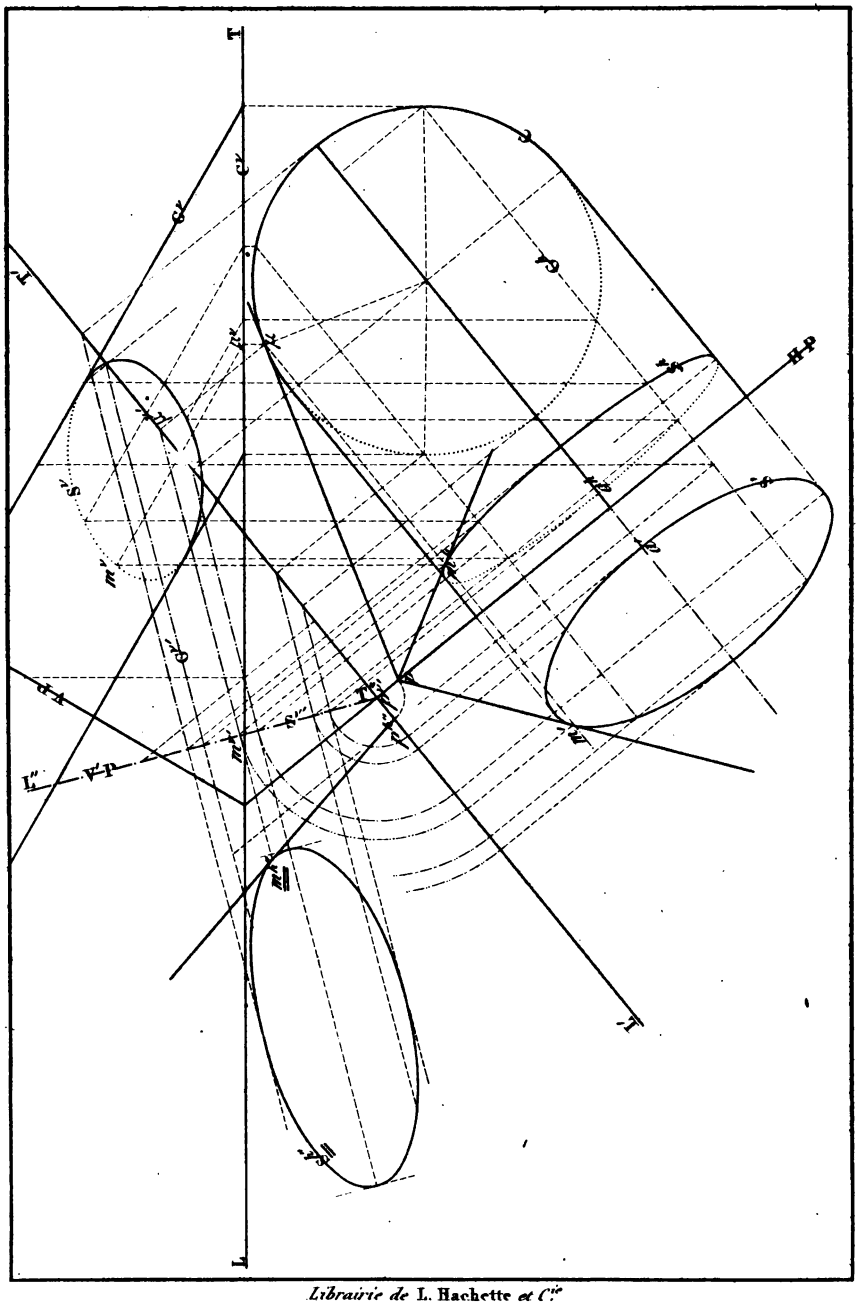
Librairie de L. Hachette et Cie.



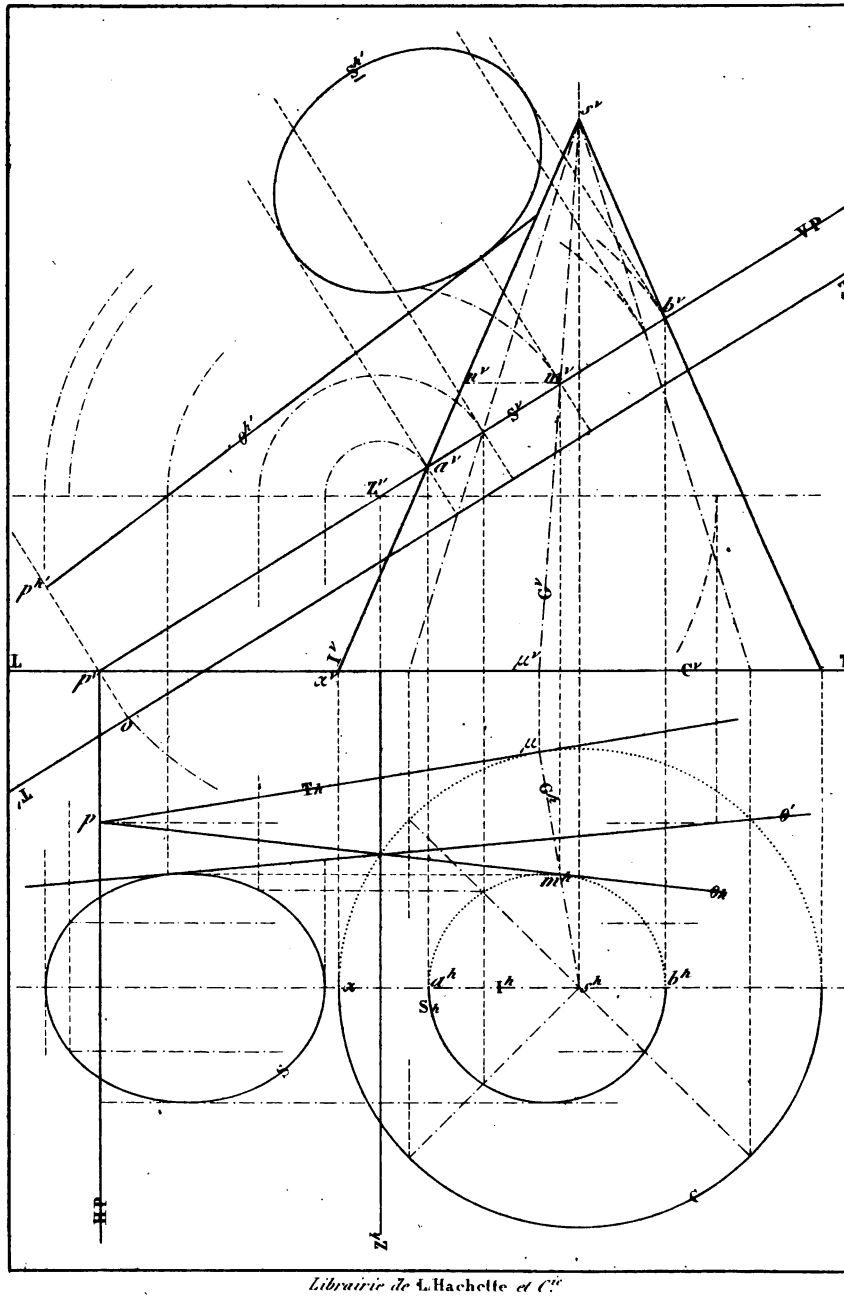
Librairie de L. Hachette *et Cie*



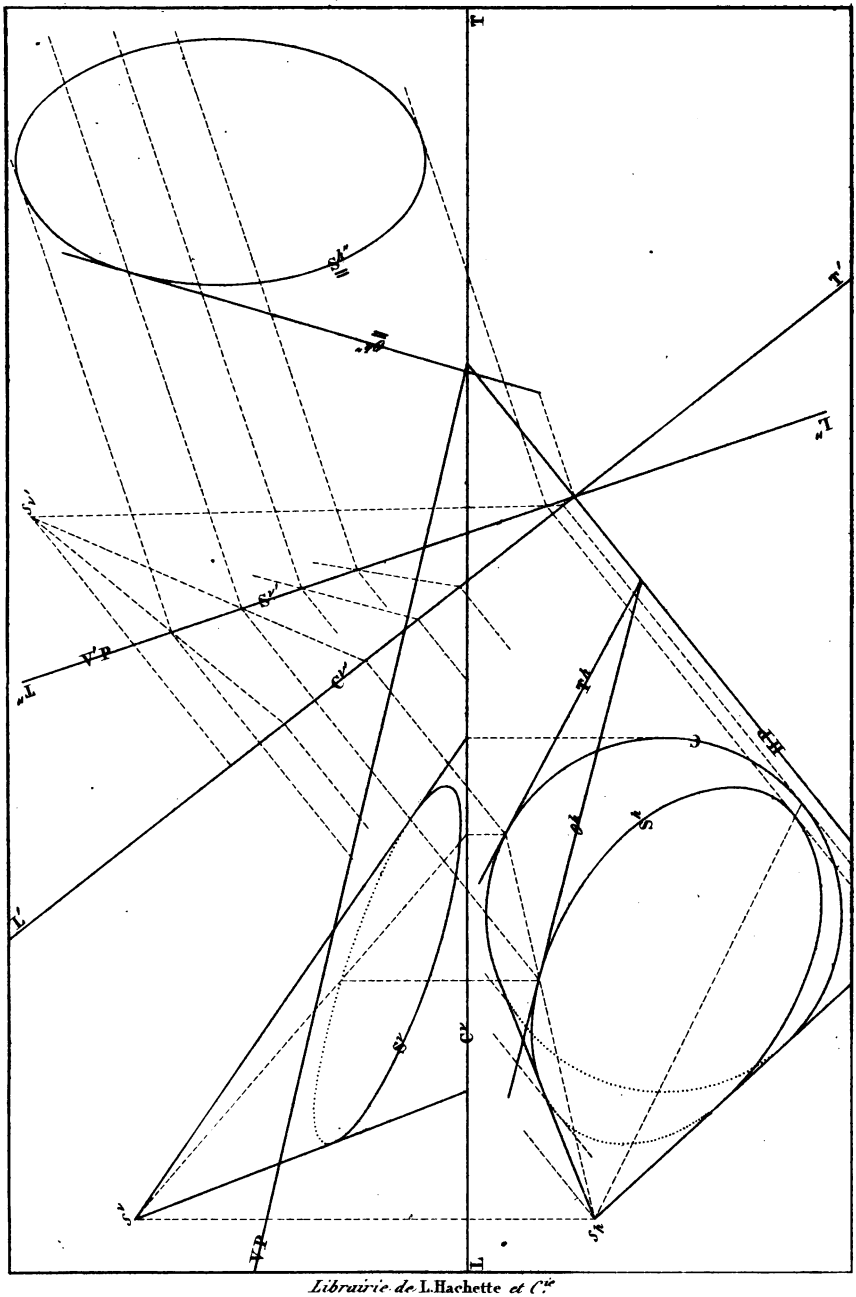
Librairie de L. Hachette et Cie

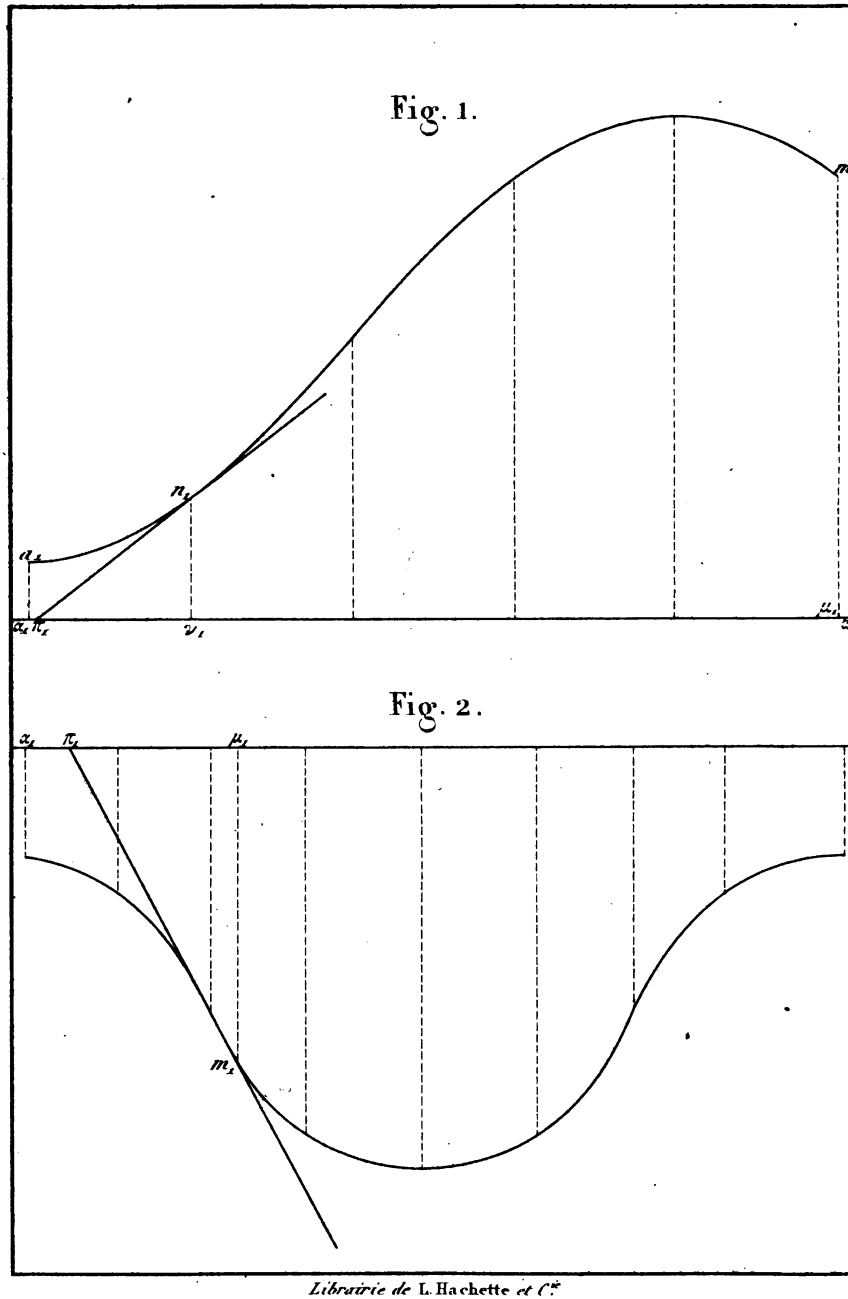


Librairie de L. Hachette *et Cie*

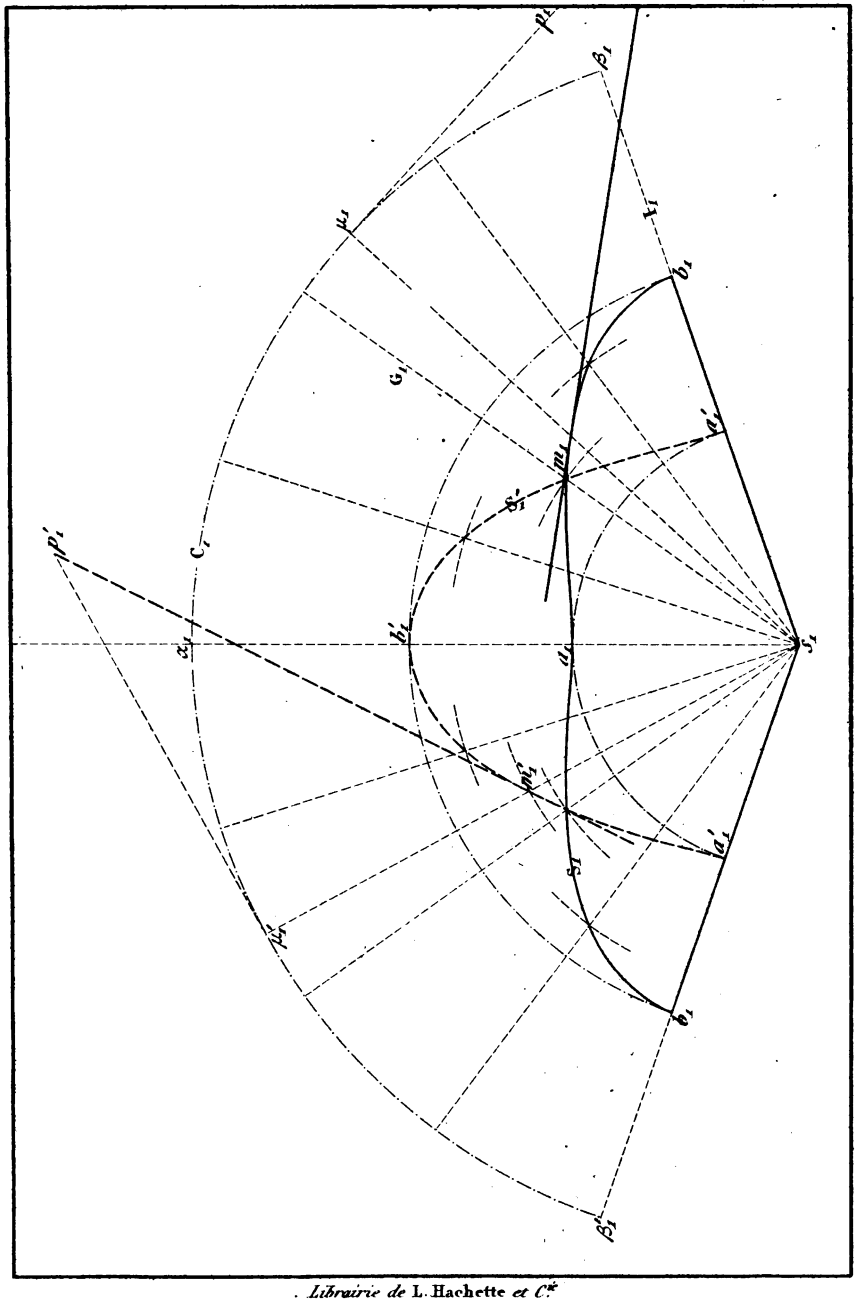


Librairie de L. Hachette et Cie

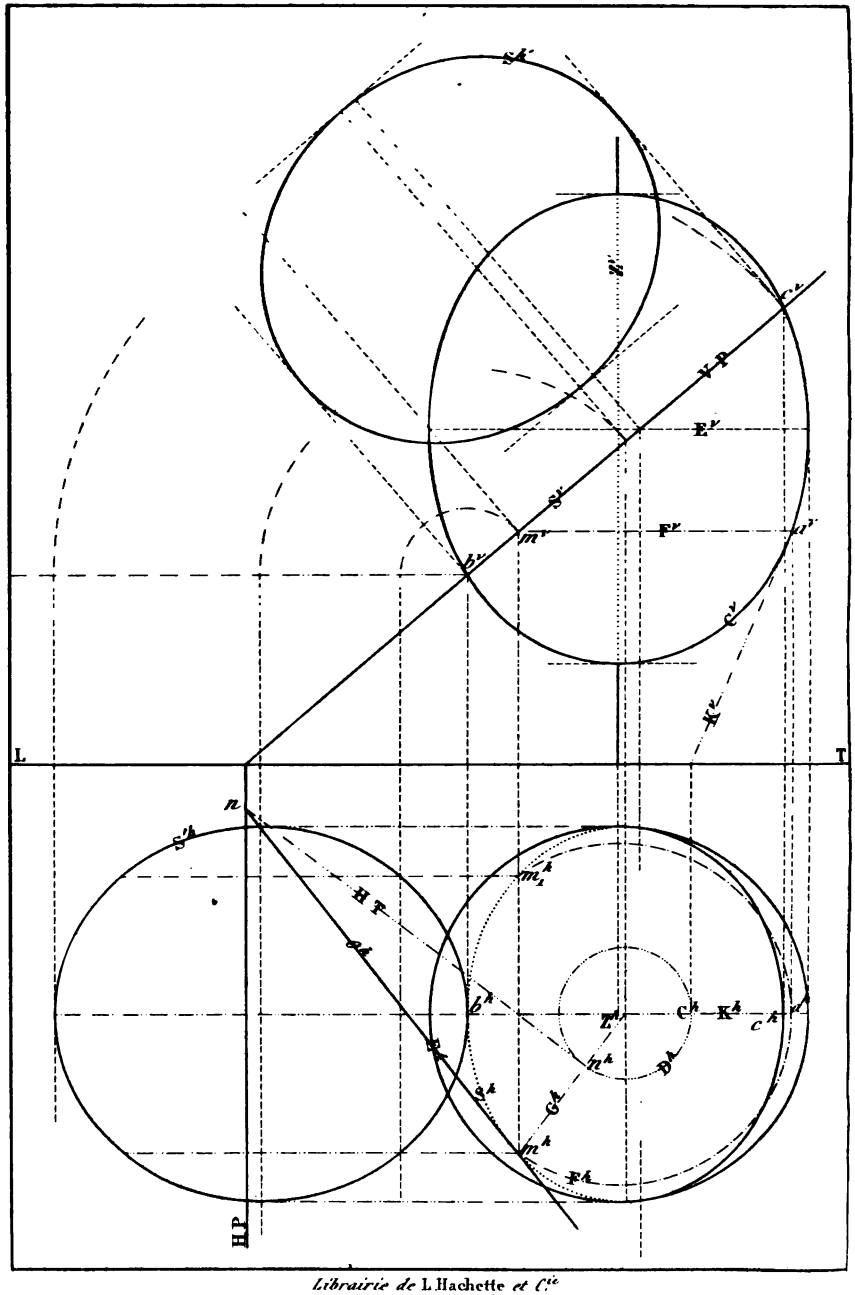

T
T'
T''
L
L'
L''
C''
C'
S''
S'
S
S'
S''
S''
S'
S''
S'
S''
S'



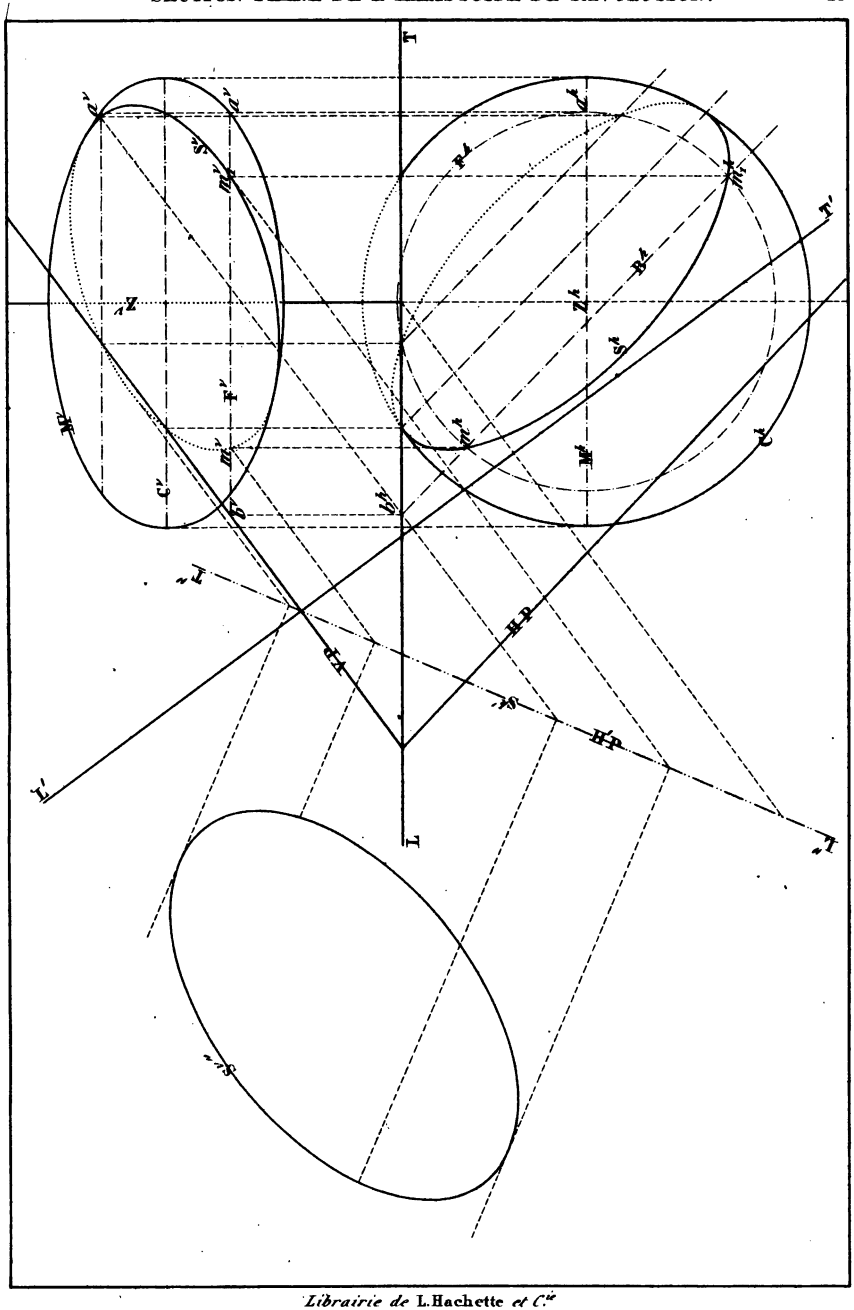
Librairie de L. Hachette *et Cie*



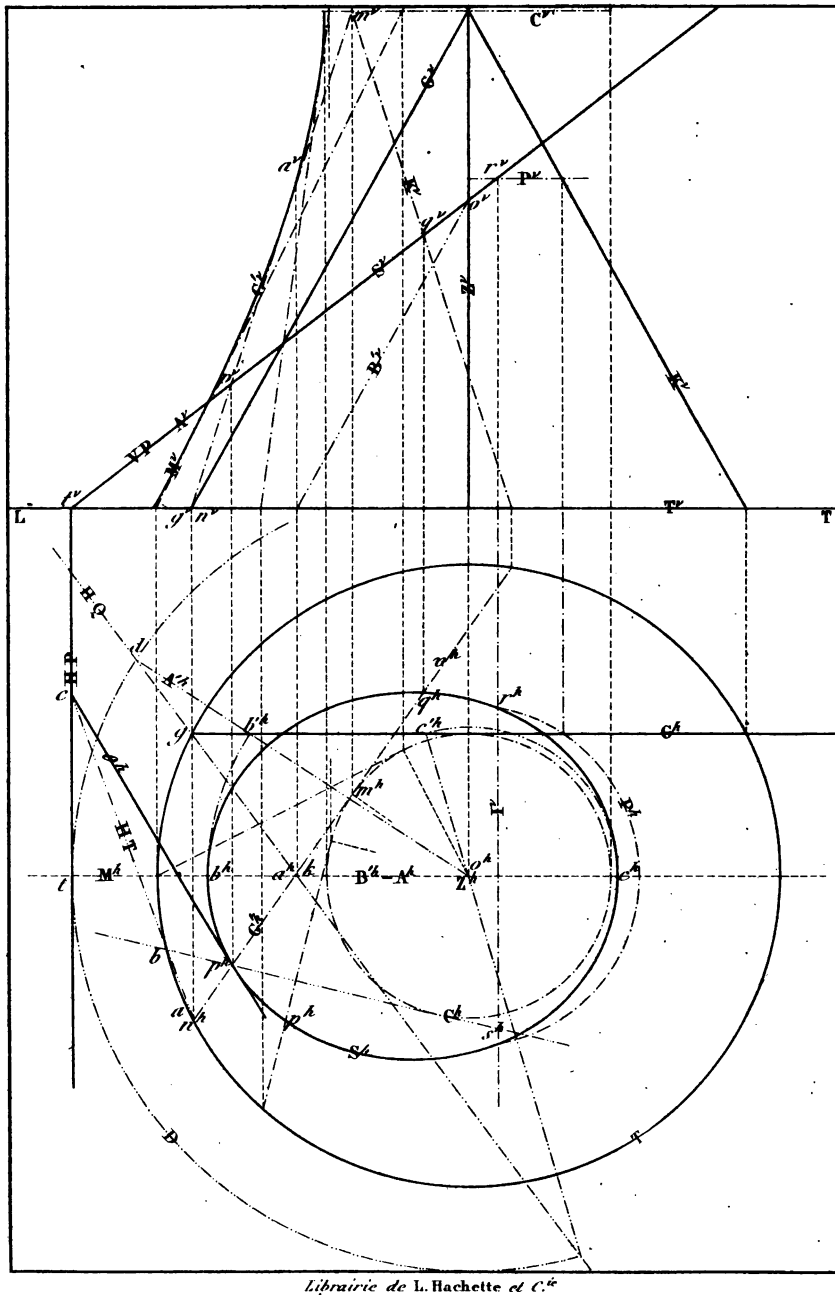
Librairie de L. Hachette *et Cie*



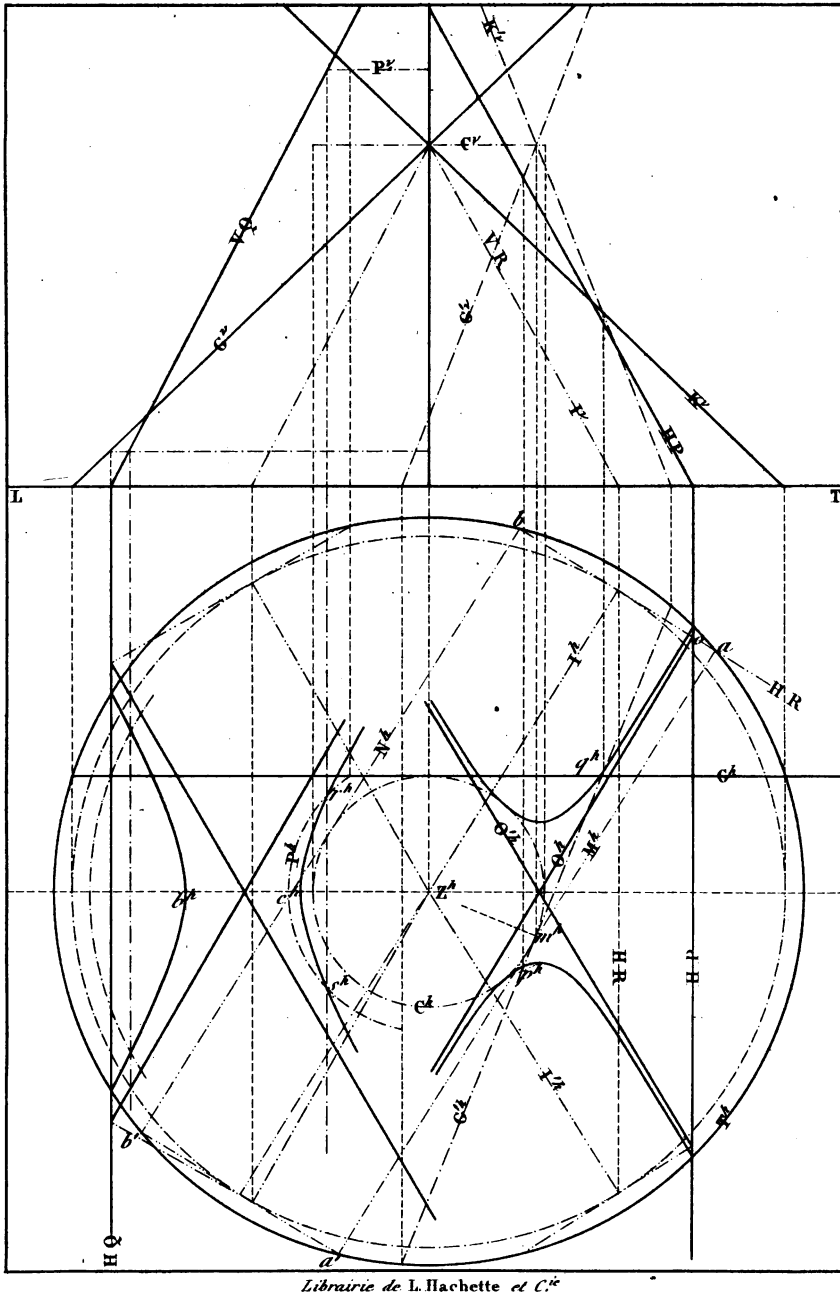
Librairie de L. Hachette *et Cie*



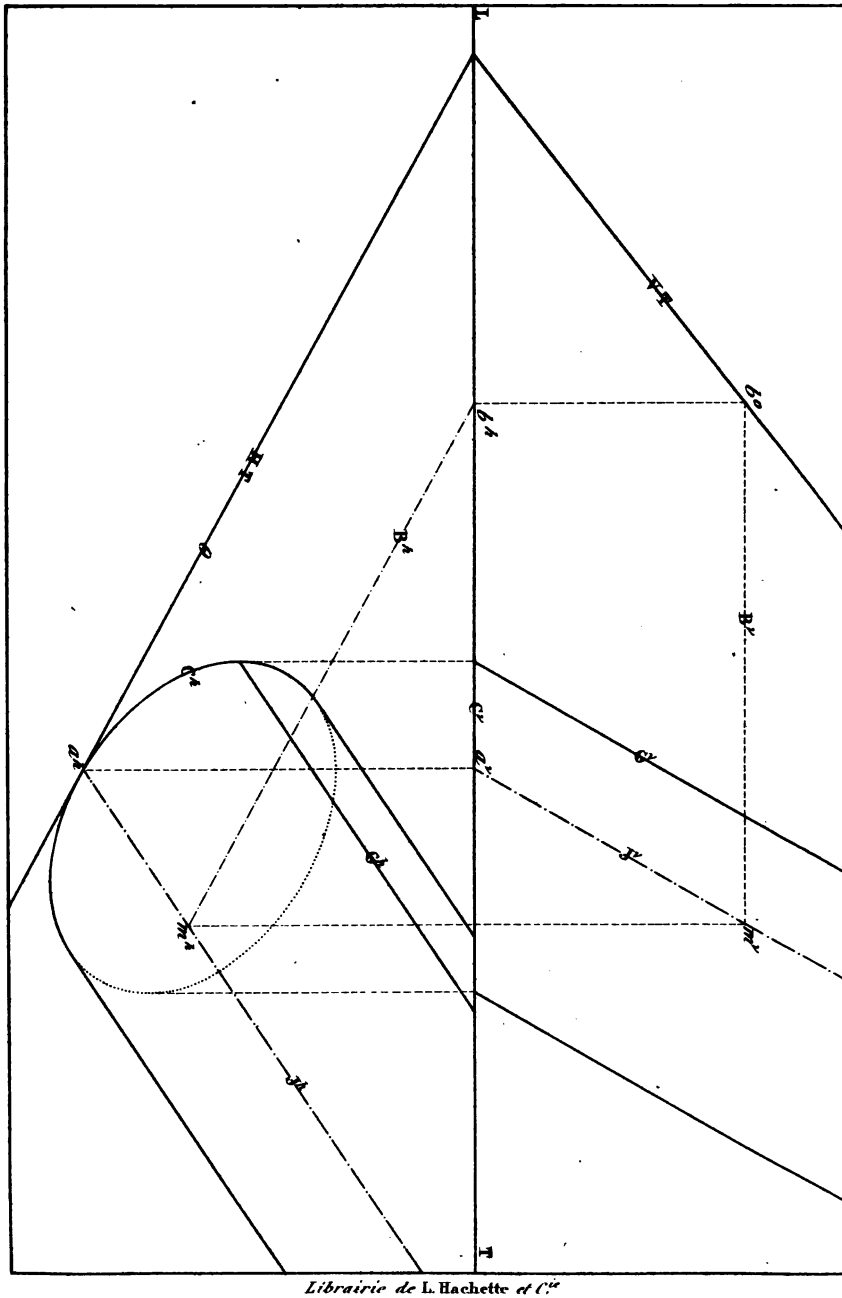
Librairie de L. Hachette *et C.ie*



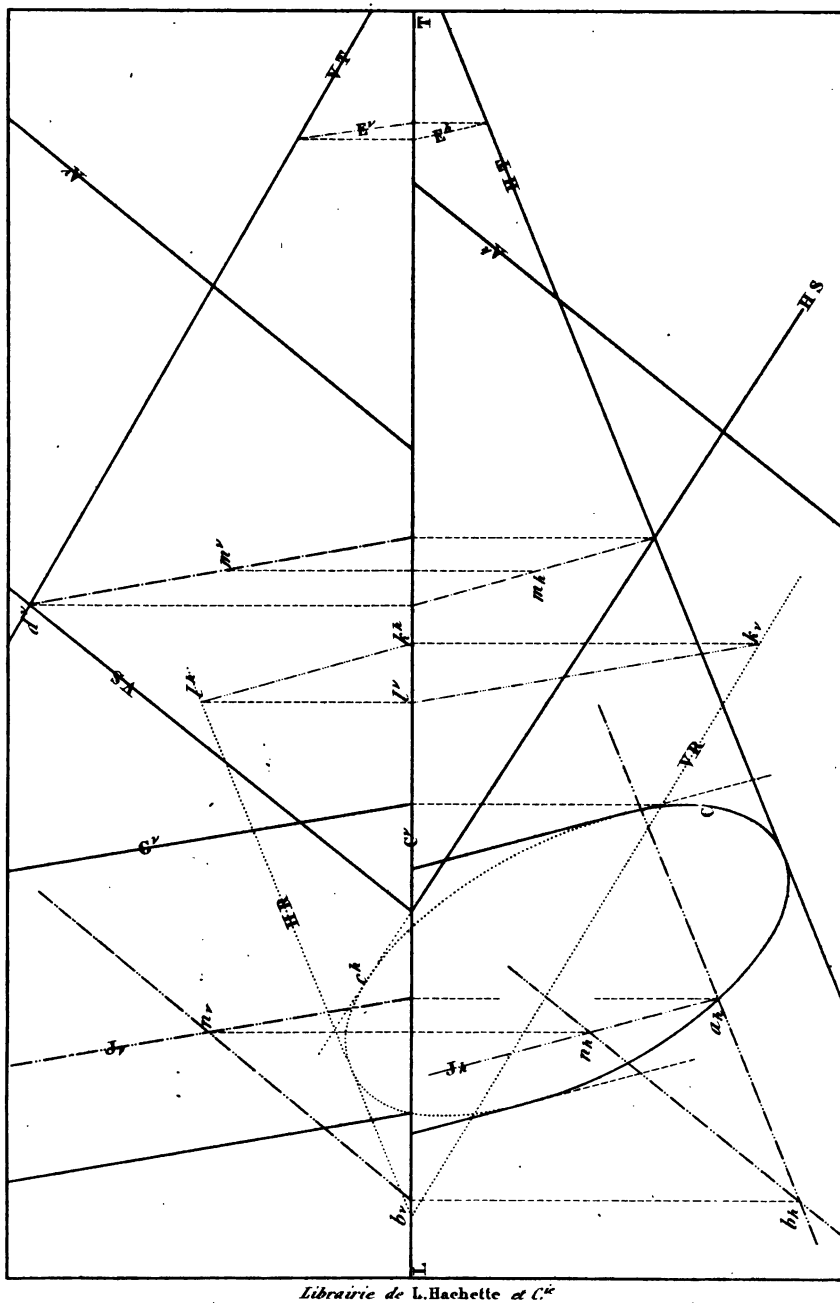
Librairie de L. Hachette *et C.ie*



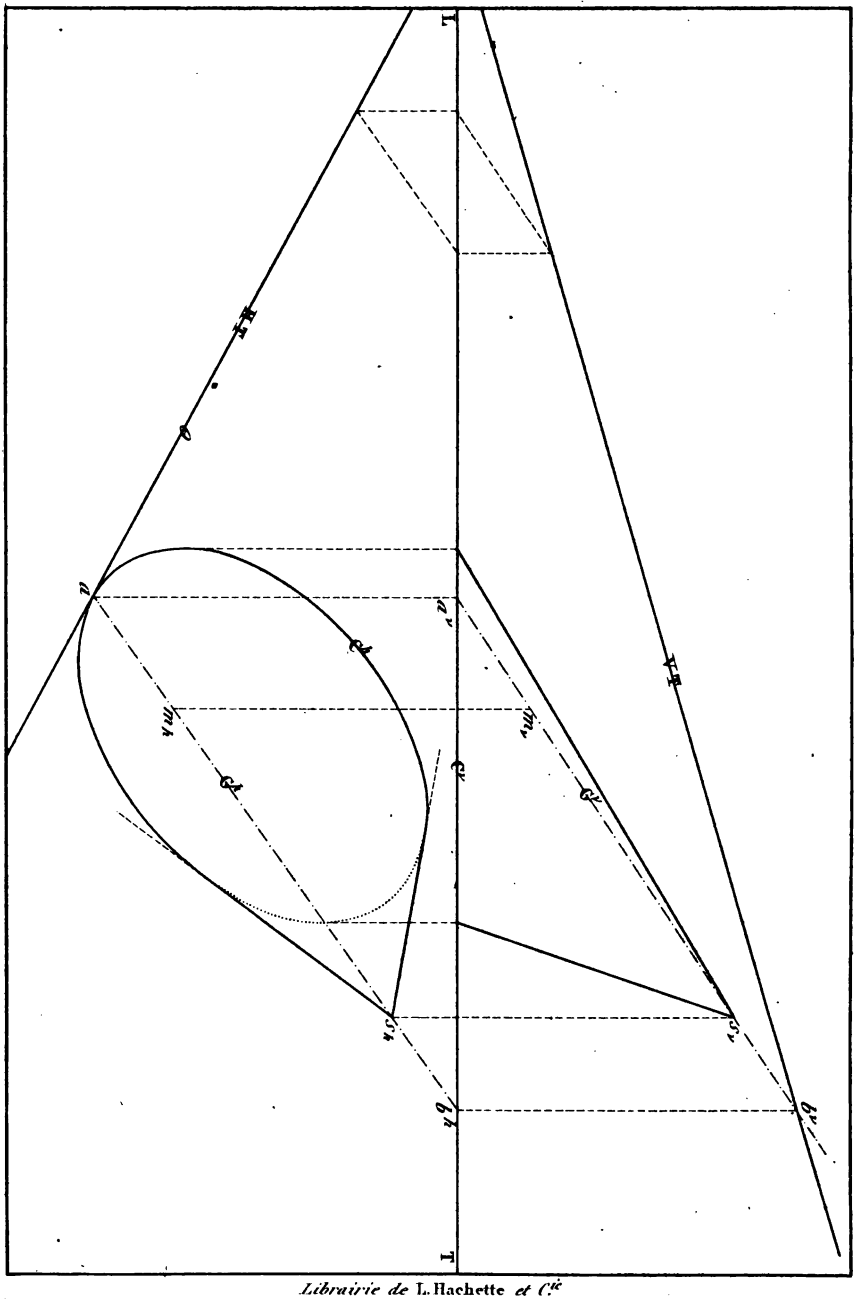
Librairie de L. Hachette *et C.ie*



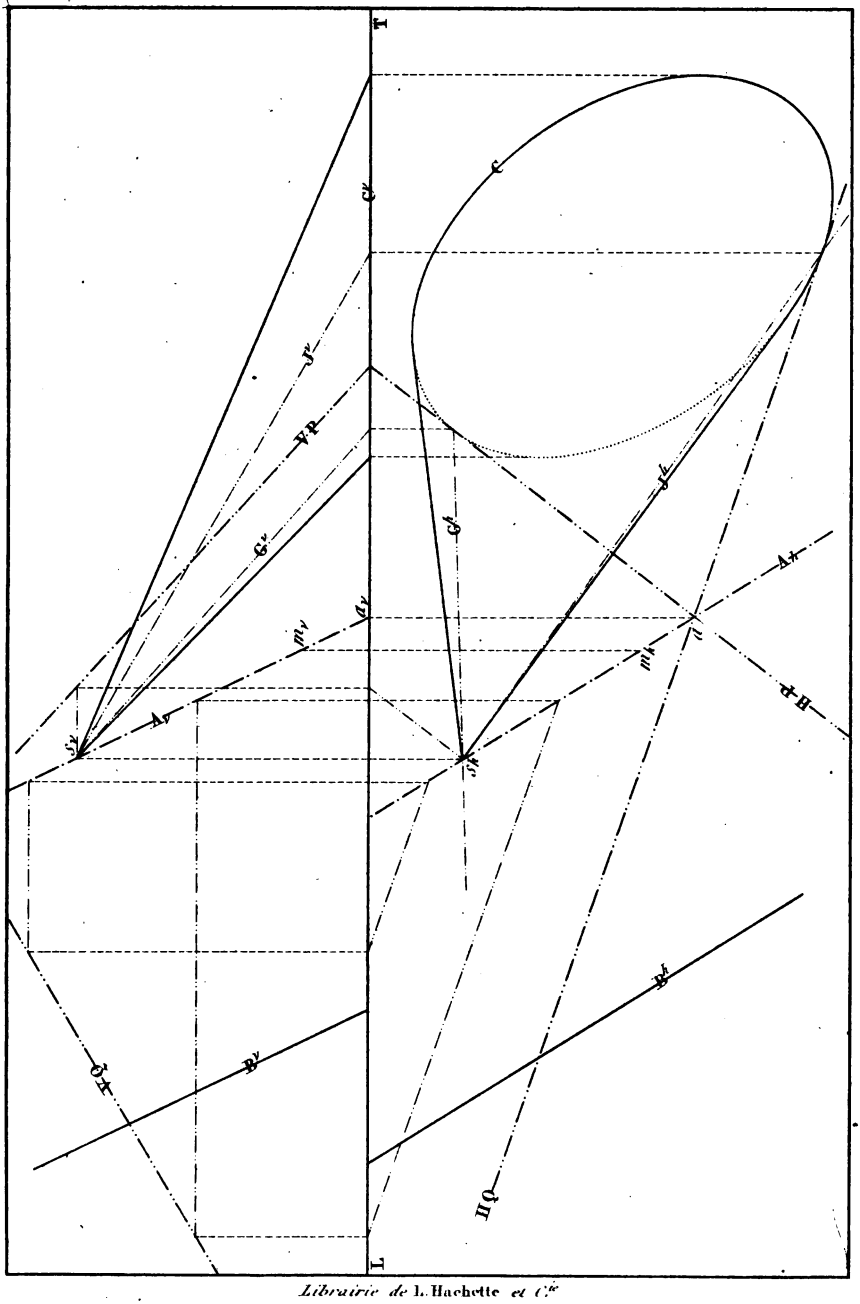
Librairie de L. Hachette *et Cie*



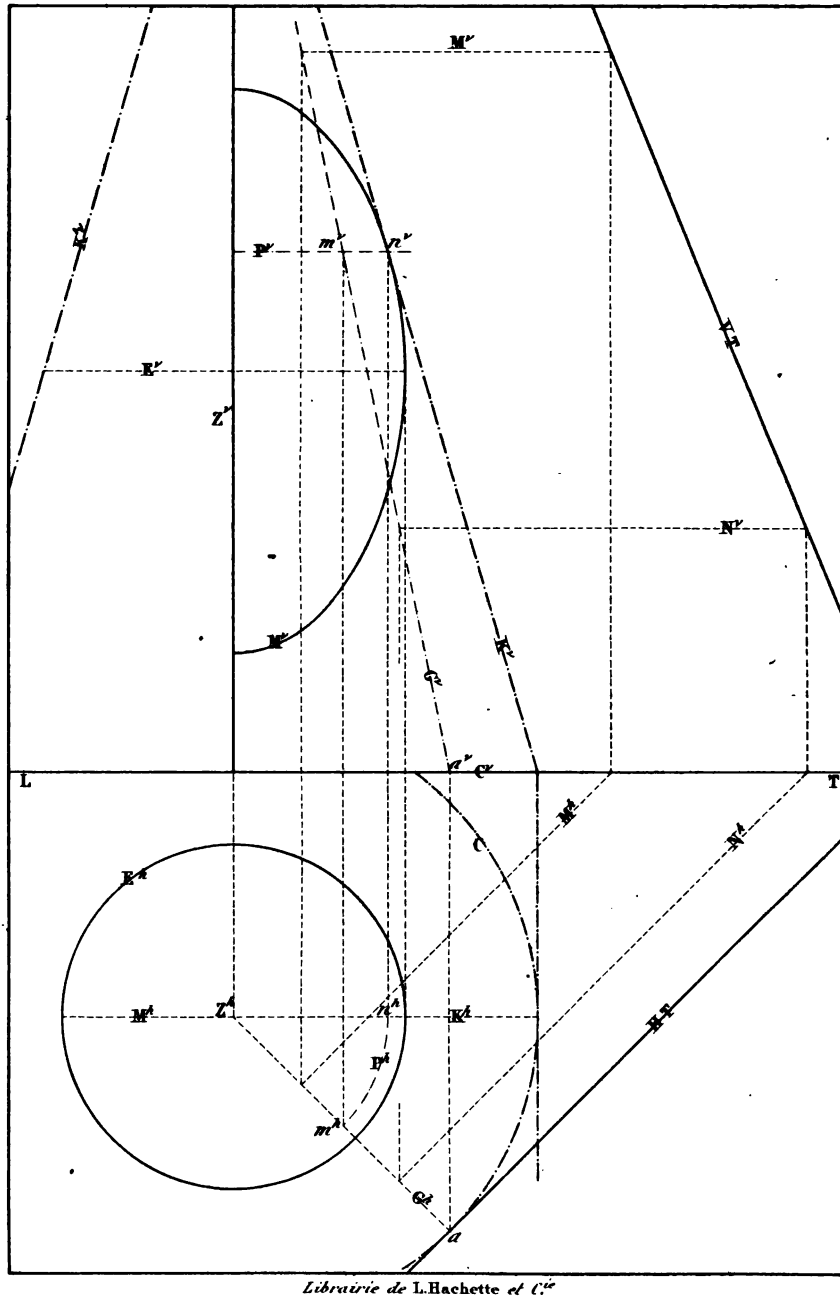
Librairie de L. Hachette *et Cie*



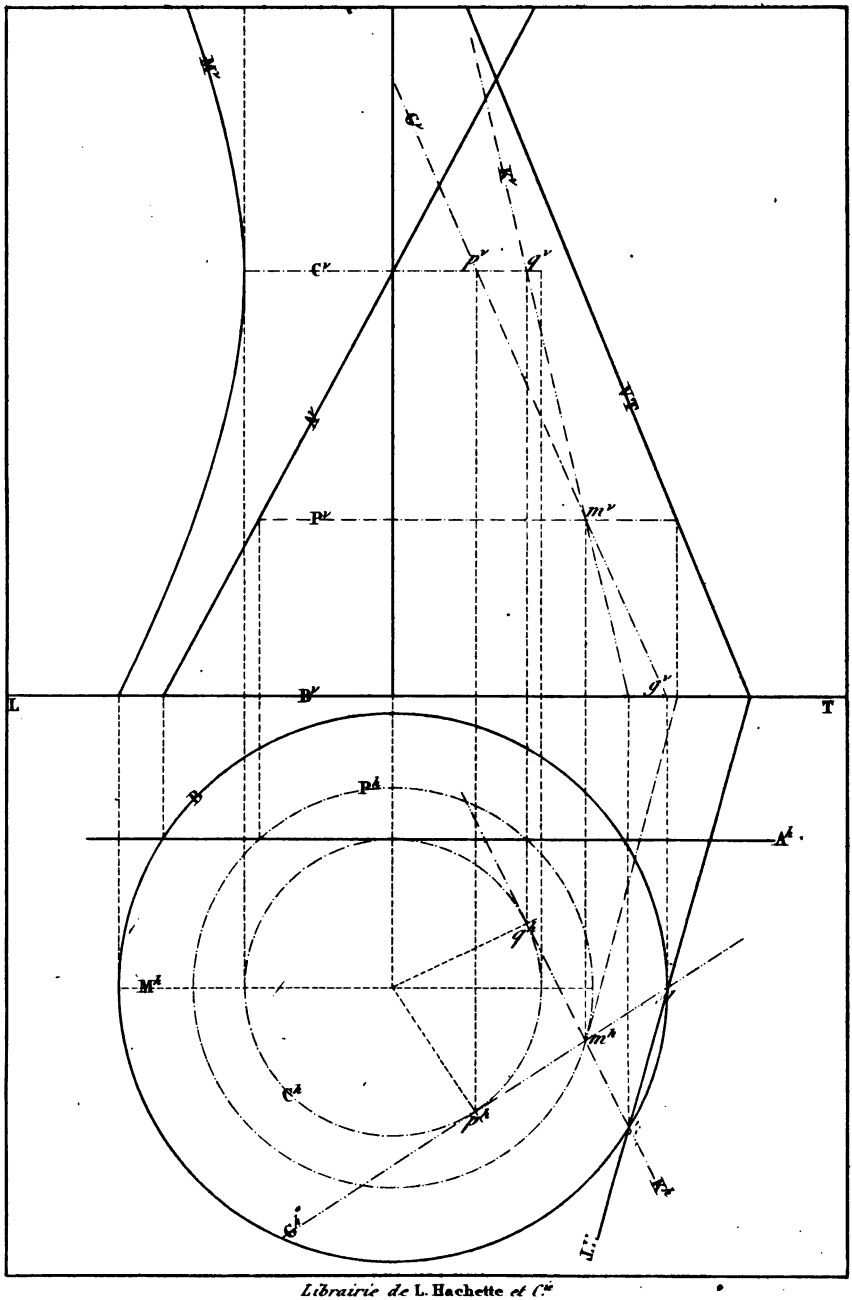
Librairie de L. Hachette *et Cie*



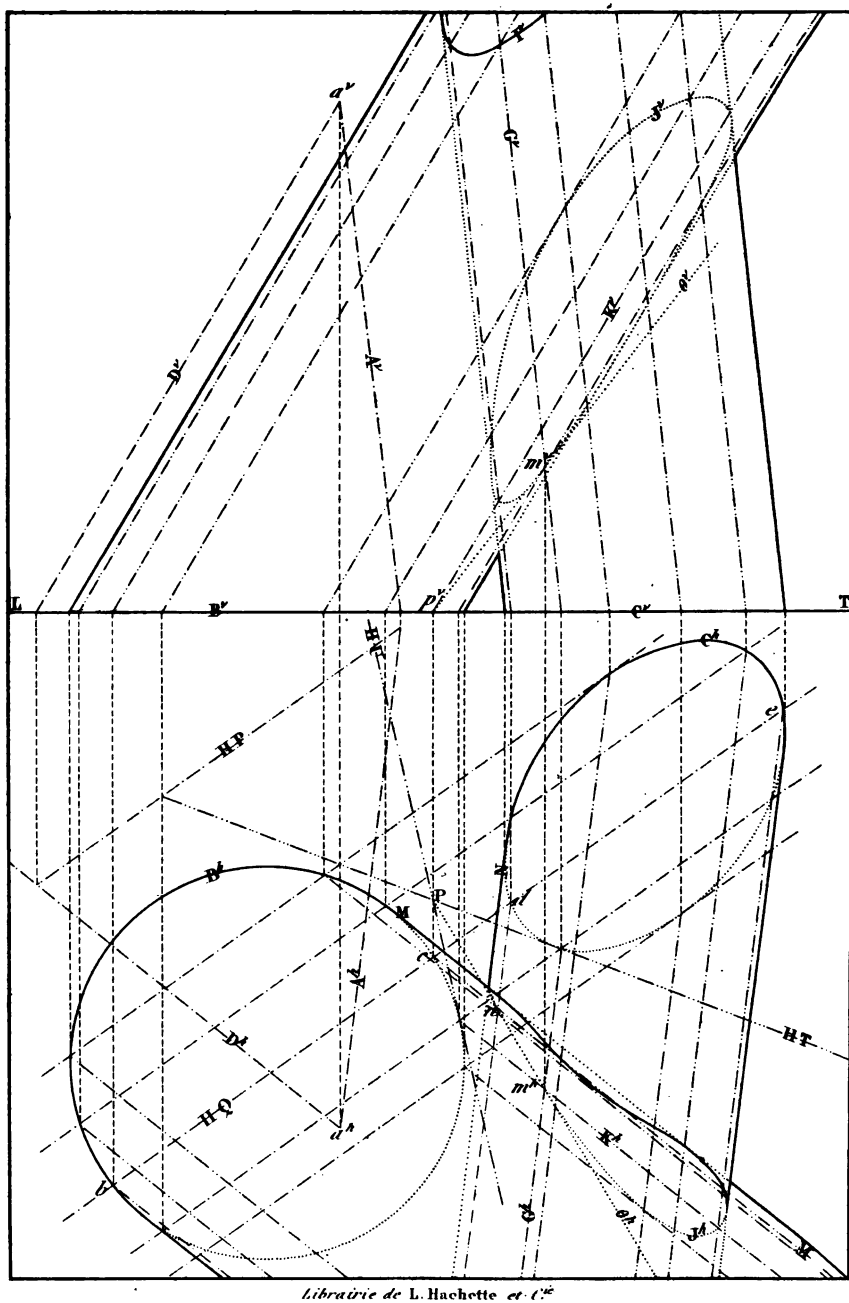
Librairie de L. Hachette *et Cie*



Librairie de L. Hachette *et Cie*

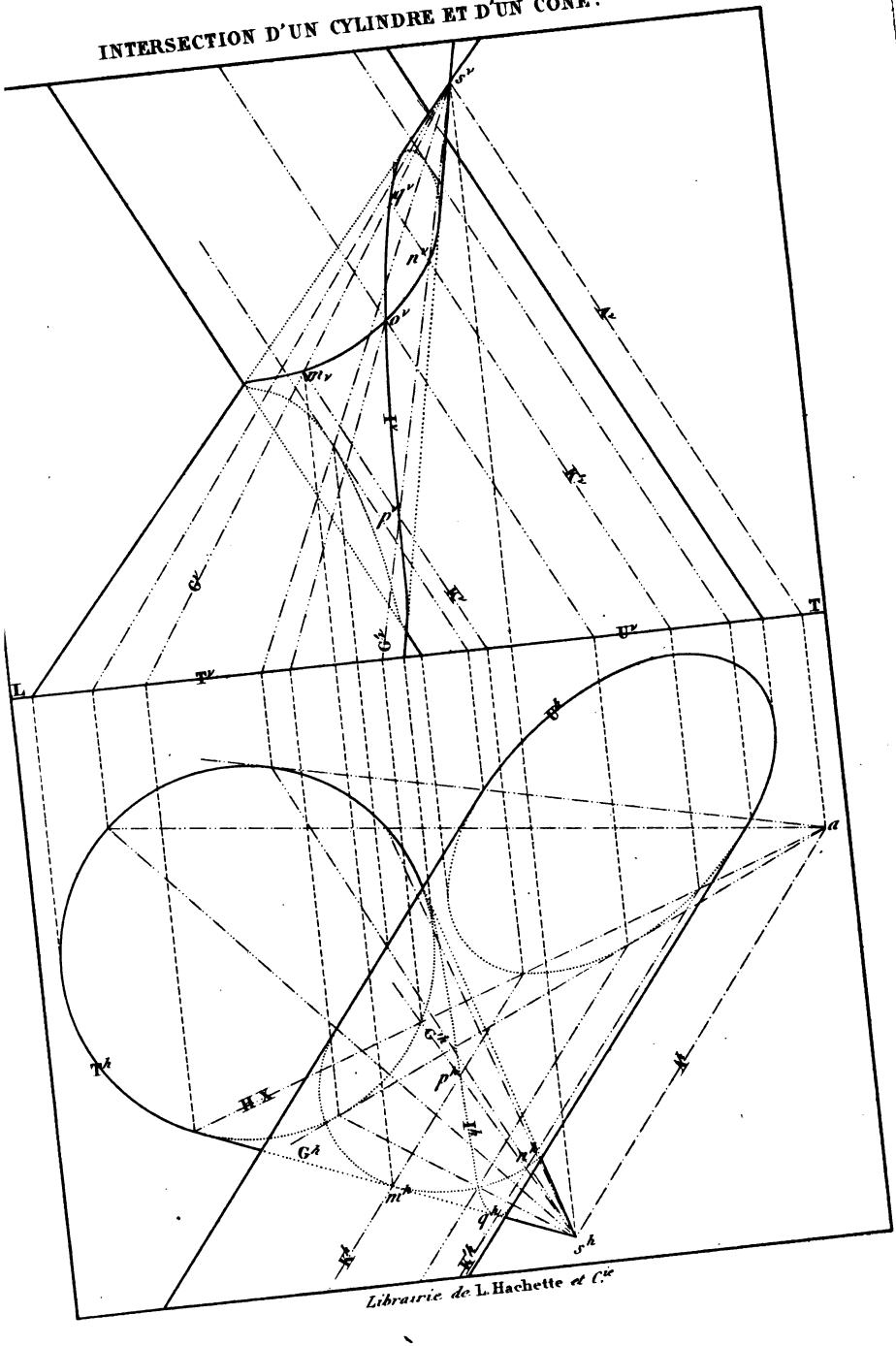


Librairie de L. Hachette *et* C.ie



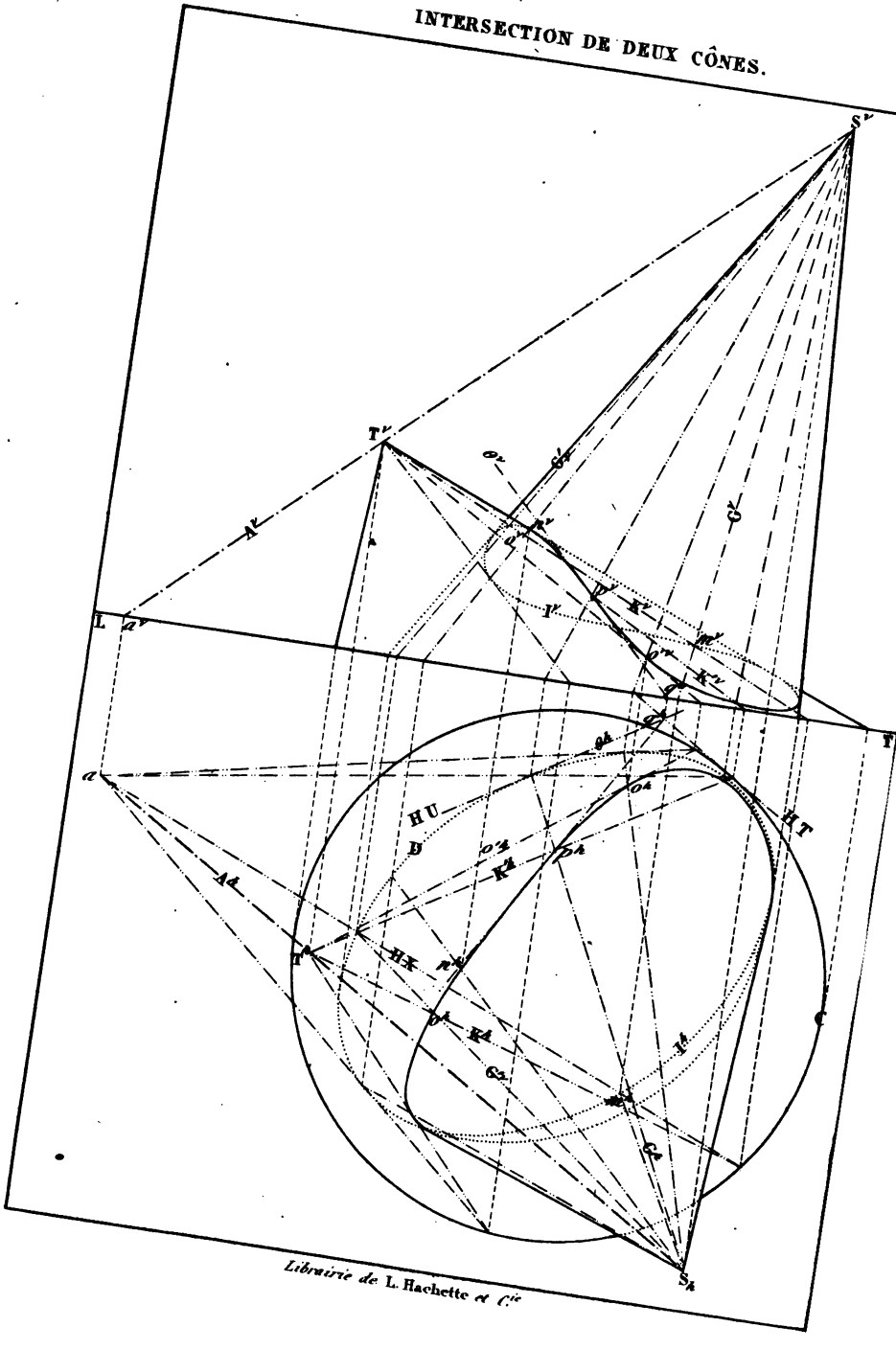
Librairie de L. Hachette et Cie

INTERSECTION D'UN CYLINDRE ET D'UN CÔNE.

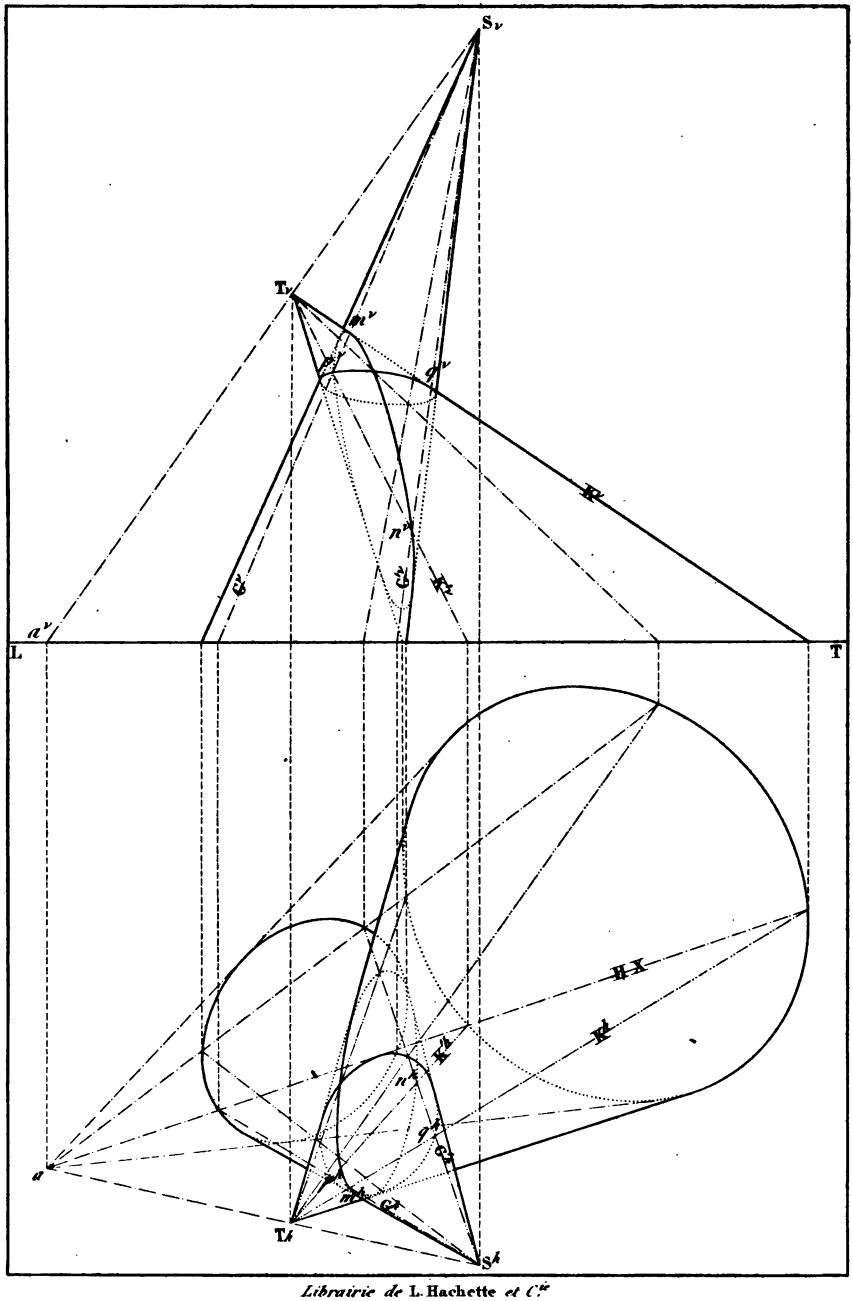


Librairie de L. Hachette et Cie

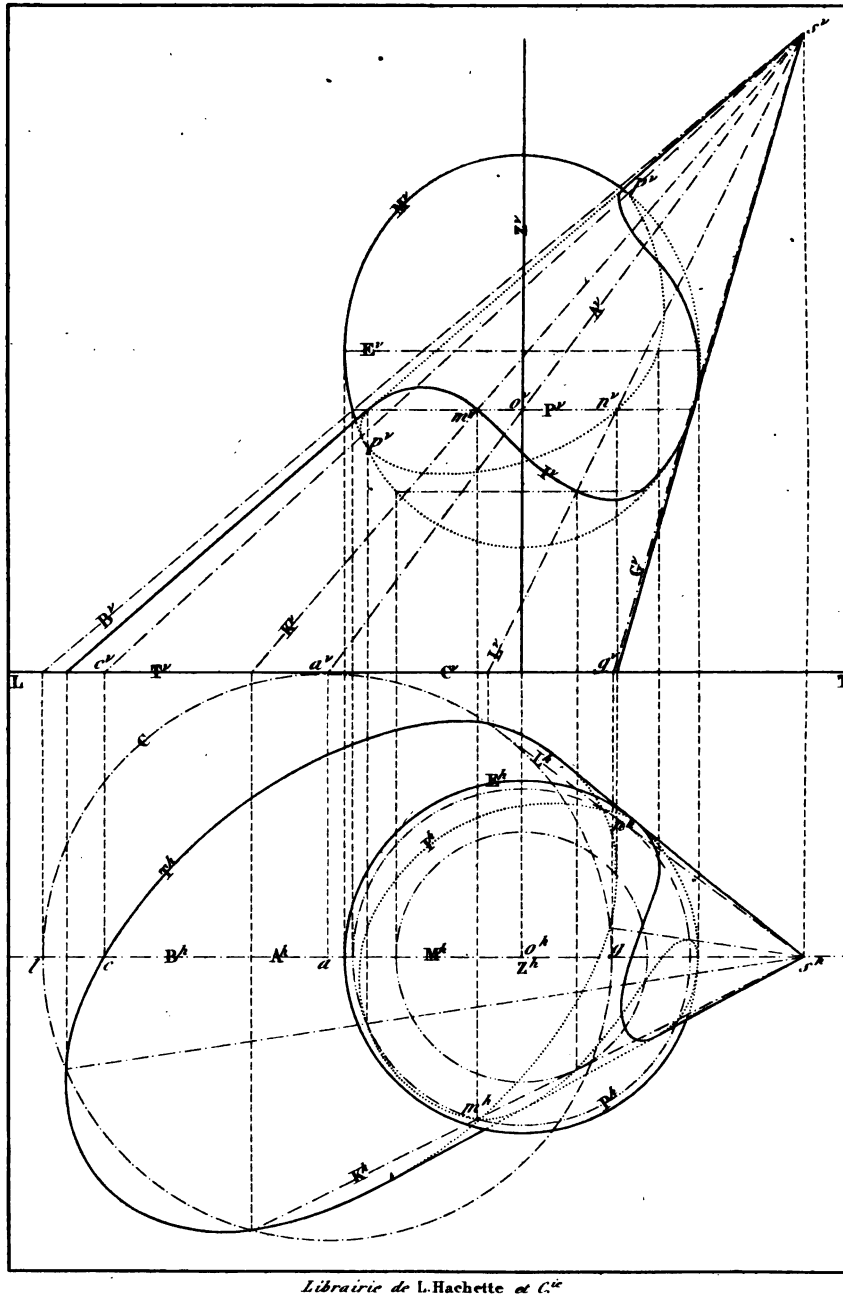
INTERSECTION DE DEUX CÔNES.



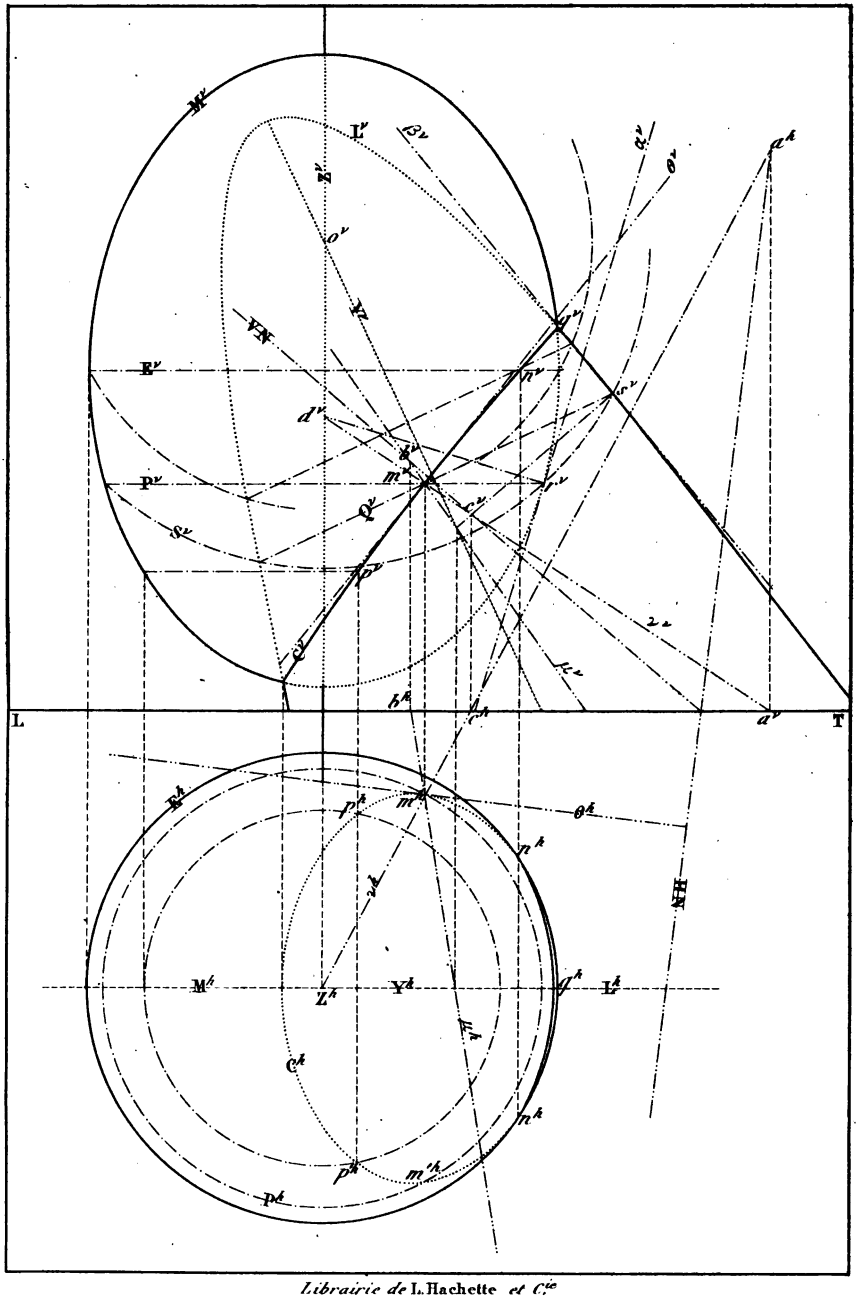
Librairie de L. Hachette et Cie



Librairie de L. Hachette *et* Cie



Librairie de L. Hachette *et Cie*



Librairie de L. Hachette *et Cie*

74

Math 5708.52.2
Traite elementaire de geometri
Cabot Science 003340071
3 2044 091 906 727